Examen 1 - solutions

Partie A

1.	A	6.	A
2.	D	7.	D
3.	D	8.	D
4.	C	9.	A
5.	A	10.	C

Partie B

11. Les coordonnées de T sont $(3{,}2)$.
12. Les coureurs avec un temps de 65 se classent dans le 81ème rang centile.
13. Le volume de la petite pyramide est $10\,cm^3$.
14. La distance est approximativement 17 unités.
15. Le volume est approximativement $69\,m^3$.
16. L'équation de la droite L_2 est $y = -3x + 7$.

Partie C

17. Pour un travail qui dure 5 heures, les deux compagnies demandent le même prix.
18. Le volume de la pyramide est approximativement $5\,179\,m^3$.
19. La différence entre le revenu maximum et le revenu actuel est de $54\,\$$.
20. Le périmètre de la ferme est $446\,hm$.
21. La pente du segment PQ est $\frac{7}{4}$.
22. La mesure de l'angle Q est approximativement $86°$.
23. La base inclinée du verre est approximativement $5{,}66\,cm$.
24. L'aire du rectangle $ABCD$ est $120\,cm^2$.
25. La fusée atterrit approximativement à $9{,}2$ mètres du mat.

Examen 1 - solutions
Partie A

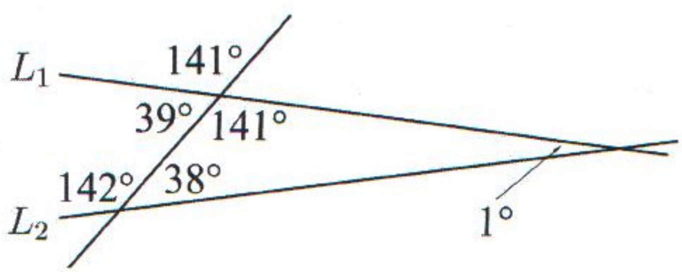
1. L'angle GEF mesure $180° - 40° - 64° = 76°$. Soit x la longueur du côté EG. Par la loi des sinus, nous avons le rapport

$$\frac{x}{\sin 64} = \frac{140{,}3}{\sin 76}.$$

D'où $x = 140{,}3(\sin 64)/\sin 76 \approx 130\,m$. Le coût du trottoir est donc de $130(20\,\$) = 2\,600\,\$$.

La bonne réponse est A.

2. On dit que deux droites coïncident si elles correspondent à la même droite. Ceci n'est pas le cas pour les droites L_1 et L_2. Donc la réponse C est fausse. Observons que les angles $141°$ et $142°$ sont des angles correspondants. Comme ils ne sont pas égaux, les droites L_1 et L_2 ne sont pas parallèles. Ainsi la réponse A est fausse. Puisque les droites L_1 et L_2 ne sont pas parallèles, elles doivent se couper en un point. Donc la réponse D est correcte. Pour voir pourquoi la réponse B est fausse, imaginons que nous ayons prolongé les droites L_1 et L_2 jusqu'à ce qu'elles se coupent comme l'indique le diagramme suivant.



L'angle où les droites s'intersectent mesure alors seulement $1°$, donc elles ne peuvent pas être perpendiculaires, car l'angle formé par deux droites perpendiculaires doit mesurer $90°$. Ainsi donc, B est faux.

La bonne réponse est D.

3. Le maximum de la fonction ne peut être 2 car, lorsque $x = 1$, la valeur correspondante de y est plus grande que 2. Donc, la réponse A est fausse. S'il était vrai que $f(2) = 0$, cela signifierait que $(2{,}0)$ est sur le graphique, ce qui n'est visiblement pas le cas. Donc B est aussi faux. (Bien que $f(2) = 0$ soit faux, nous avons $f(0) = 2$). Le graphique a des ordonnées plus grandes que 2 et également des ordonnées plus petites que -1. Ainsi l'image de la fonction ne peut être $[-1{,}2]$. Et donc, la réponse C est fausse. En observant le graphique, on voit que la fonction décroît sur l'intervalle $[1{,}5]$. Comme $[2{,}4]$ est contenu dans $[1{,}5]$, on en conclut que f est aussi décroissante sur $[2{,}4]$. Donc la réponse D est vraie.

La bonne réponse est D.

4. La pente de la droite ℓ est $-\frac{5}{4}$ car elle est parallèle à la droite $y = -\frac{5}{4}x + 8$. Comme les droites dans les réponses A et D ont la même pente $\frac{4}{5}$, ces dernières ne peuvent être correctes. Pour déterminer l'abscisse à l'origine des droites dans les réponses B et C, posons $y = 0$ et résolvons l'équation obtenue en x. Nous obtenons alors que l'abscisse à l'origine de la droite dans B est $x = \frac{4}{5}$, et l'abscisse à l'origine de la droite dans C est $x = -\frac{4}{5}$. Ainsi la droite dans C a une abscisse à l'origine négative.

La bonne réponse est C.

5. Changeons l'exposant négatif en un exposant positif en le ramenant au dénominateur. Ensuite, remplaçons l'exposant rationnel par une notation racine carrée.

$$(-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(-x)^{-\frac{1}{2}}}{1} = \frac{1}{(-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{-x}}.$$

La bonne réponse est A.

6. Développons le numérateur, ensuite factorisons le numérateur et le dénominateur.

$$\frac{x(x-2)+1}{x^2-3x+2} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-1x+2} = \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}.$$

La bonne réponse est A.

7. L'aire du triangle ABC est $(2)(6)/2 = 6\,cm^2$. L'aire du triangle PQR est $(8)(6)/2 = 24\,cm^2$. L'aire du triangle UVW est $(4)(3)/2 = 6\,cm^2$. Donc le triangle UVW est équivalent au triangle ABC. Par un calcul direct, on voit que le triangle UVW est semblable au triangle PQR avec un rapport de similitude égal à 2.

La bonne réponse est D.

8. Dans la réponse A, nous avons changé la valeur de h, donc A ne peut être vrai. Comme la parabole initiale s'ouvre vers le bas, la valeur initiale de a est négative. Ainsi, lorsque cette valeur de a est multipliée par $-\frac{1}{2}$, la nouvelle valeur de a est positive. Nous en concluons alors que le graphique de g est une parabole qui s'ouvre vers le haut et ayant subie une contraction verticale. Par conséquent, B est faux puisque sa parabole s'ouvre vers le bas. La parabole de la réponse C n'a subi aucune contraction verticale; donc C est aussi faux.

La bonne réponse est D.

9. La droite AC est une sécante aux droites parallèles BE et CD. Comme les angles $\angle ABE$ et $\angle ACD$ sont des angles correspondants, ils sont égaux. La droite AD est aussi une sécante aux droite parallèles BE et CD. Et comme les angles $\angle AEB$ et $\angle ADC$ sont des angles correspondants, ils sont aussi égaux. Par conséquent, la condition AA pour triangles semblables s'applique à ΔABE et ΔACD.

La bonne réponse est A.

10. L'idée principale est que dans une enquête, l'on consulte des experts. Dans A, les questions ne sont pas posées à des experts, mais aux habitants d'une ville. Donc ce n'est pas la bonne réponse. En fait, A est un recensement puisque toute le monde dans la ville est intérrogé. La réponse B est un sondage, donc B n'est pas correcte non plus. La réponse D ne correspond à aucun type d'étude statistique, donc ce n'est pas la bonne réponse non plus. Dans la réponse C, on consulte des experts paysagistes. Ceci est donc un exemple d'enquête.

La bonne réponse est C.

Examen 1 - solutions
Partie B

11. D'abord, nous allons montrer que ΔVTU est isométrique à ΔVTW. Les coordonnées de V sont $(-2, -3)$; ainsi donc, UV et WV ont la même longueur 10. Cela signifie que ΔUVW est isocèle, d'où $\angle VUT = \angle VWT$. Comme $\angle UVW = 90°$, cela implique que $\angle VUT = \angle VWT = 45°$. Par conséquent, $\angle UVT = \angle WVT = 45°$. D'où $m\overline{UV} = m\overline{WV}$, $\angle UVT = \angle WVT$ et $m\overline{VT} = m\overline{VT}$ entraînant, par la condition CAC pour triangles isométriques, que ΔVTU est isométrique à ΔVTW. On en déduit que $m\overline{UT} = m\overline{WT}$; ce qui signifie que T est le milieu de UW. Ainsi, tout ce que l'on veut réellement savoir dans cette question est le milieu du segment UW. Le milieu de $U = (-2{,}7) = (x_1{,}y_1)$ et $W = (8, -3) = (x_2{,}y_2)$ est

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2+8}{2}, \frac{7+-3}{2}\right) = (3{,}2).$$

Les coordonnées de T sont $(3{,}2)$.

12. Dans une course, les meilleurs sont ceux qui ont obtenu les plus petits temps. Nous avons 3 coureurs avec un temps de 65, et 96 avec un temps pire que 65. La formule

$$\text{Rang centile} = \frac{\text{nombre de temps pire ou égaux à 65}}{\text{nombre total de temps de course}} \times 100,$$

nous indique que

$$\frac{96+3}{24+3+96} \times 100 = 80{,}48... = 81\text{ème rang centile.}$$

(On rappelle que dans le calcul des rangs centiles il faut toujours arrondir à la plus grande unité près).

Les coureurs avec un temps de 65 se classent dans le 81ème rang centile.

13. Nous savons que le périmètre de la base carrée de la grande pyramide est $32\,cm$, ce qui implique que chaque côté de la base mesure $32 \div 4 = 8\,cm$. Donc le volume de la grande pyramide est

$$V = \frac{\text{(aire de la base)(hauteur)}}{3} = \frac{(8^2)(30)}{3} = 640\,cm^3.$$

Soit $p > 1$ le rapport de similitude des deux pyramides. En utilisant les informations que nous avons sur les aires de base de nos pyramides, on obtient que $p^2 = 16$, et donc $p = \sqrt{16} = 4$. Le volume de la petite pyramide égale le volume de la grande pyramide divisé par p^3, ce qui donne $640 \div 4^3 = 10\,cm^3$.

Le volume de la petite pyramide est $10\,cm^3$**.**

14. Nous allons déterminer le point R et l'équation de la droite L_2. Le point R est l'abscisse à l'origine de la droite L_1. Pour déterminer cette abscisse à l'origine, on pose $y = 0$ dans l'équation de L_1. Cela donne $0 = -3x + 18$, d'où $x = 6$ et $R = (6{,}0)$. Maintenant, pour déterminer l'équation de la droite L_2, on oberve que celle-ci est parallèle à $y = -3x + 18$. Ainsi sa pente est -3. Soit $y = -3x + b$ l'équation de L_2. En y substituant le point $(24{,}0)$, cela donne $0 = -3(24) + b$ et $b = 72$. Donc, l'équation de L_2 est $y = -3x + 72$. On peut alors calculer la distance entre le point R et la droite L_2,

$$d(R{,}L_2) = \frac{|ax_1 - y_1 + b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|(-3)(6) - 0 + 72|}{\sqrt{(-3)^2+1}} = \frac{54}{\sqrt{10}} \approx 17 \text{ unités.}$$

La distance est approximativement 17 **unités.**

Solution alternative: Observons qu'il n'est pas du tout nécessaire de déterminer le point R et l'équation de la droite L_2 avant de pouvoir calculer la distance qui les séparent. En effet, comme L_1 et L_2 sont parallèles, la distance entre le point R et la droite L_2 est la même que la distance entre le point $(24{,}0)$ et la droite L_1, ce qui est donné par

$$d(\,(24{,}0)\,, L_1) = \frac{|ax_1 - y_1 + b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|(-3)(24) - 0 + 18|}{\sqrt{(-3)^2+1}} = \frac{54}{\sqrt{10}} \approx 17 \text{ unités.}$$

15. Pour déterminer le volume, nous allons calculer l'aire de la face triangulaire et multiplier par $13\,m$. Les côtés de la face triangulaire mesurent $3\,m$, $4\,m$ et $6\,m$. On rappelle la formule de Héron qui dit que, si les côtés d'un triangle mesurent a, b et c, alors l'aire de celui-ci est donnée par

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

avec $s = (a+b+c)/2$. Dans notre cas, $s = (3+4+6)/2 = 6{,}5$ et donc

$$A = \sqrt{6{,}5(6{,}5-3)(6{,}5-4)(6{,}5-6)} \approx 5{,}33\,m^2.$$

Par conséquent, le volume est $V = 13(5{,}33) \approx 69\,m^3$.

Le volume est approximativement $69\,m^3$.

16. Si nous exprimons y à partir de l'équation de L_1, nous obtenons $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$. Ainsi, la pente de L_1 est $\dfrac{1}{3}$. Comme L_2 est perpendiculaire à L_1, la pente de L_2 est l'opposé de l'inverse de $\dfrac{1}{3}$. Donc, la pente de L_2 est $-\dfrac{3}{1} = -3$. Par conséquent, l'équation de L_2 a la forme $y = -3x + b$. En y substituant $(2{,}1)$, nous obtenons $1 = -3(2) + b$, d'où $b = 7$.

L'équation de la droite L_2 est $y = -3x + 7$.

Examen 1 - solutions
Partie C

17. Nous devons d'abord déterminer la formule des coûts pour la compagnie A. Mais, comme il coûte $105\,\$$ pour effectuer un travail de 7 heures, et que la compagnie A a un taux horaire fixe, on en déduit que ce taux horaire est de $105\,\$ \div 7 = 15\,\$$. Ainsi, la formule des coûts pour cette compagnie est $C = 15h$. Pour déterminer le nombre d'heures pour lequel les deux compagnies demandent le même prix, nous devons alors résoudre le système d'équations

$$C = 12h + 15 \quad \text{et} \quad C = 15h.$$

En utilisant la méthode par comparaison, on a $12h + 15 = 15h$ et $h = 5$.

Pour un travail qui dure 5 heures, les deux compagnies demandent le même prix.

18. Comme l'aire de la base carrée est $400\,m^2$, chaque côté de la base mesure $\sqrt{400} = 20\,m$. Comme M est le milieu du segment CD, on sait que le segment CM mesure $20 \div 2 = 10\,m$. On applique alors la trigonométrie du triangle rectangle à ΔAMC pour obtenir le rapport $\tan(76) = \dfrac{AM}{10}$. Cela implique que $AM = 10(\tan 76) \approx 40{,}108$. La longueur de HM est aussi $10\,m$. On applique le théorème de Pythagore au triangle rectangle AHM pour obtenir $AH^2 + 10^2 = 40{,}108^2$. Ce qui donne $AH \approx 38{,}84$. Donc la hauteur de la pyramide est $38{,}84\,m$. Le volume de la pyramide est égal à l'aire de la base fois la hauteur divisée par trois, soit $V = (400)(38{,}84)/3 \approx 5\,179\,m^3$.

Le volume de la pyramide est approximativement $5\,179\,m^3$.

19. Le revenu quotidien de l'hôtel est obtenu en multipliant le nombre de clients par jour par le prix d'une chambre. Actuellement, ce revenu est de $(72)(126\,\$) = 9\,072\,\$$. Soit x le nombre de réductions de $3\,\$$ que le gérant de l'hôtel doit effectuer. Le prix de la chambre après ces réductions est alors $126 - 3x$ et le nombre de clients par jour est $72 + 2x$. Le revenu $R(x)$ est donné par la formule

$$R(x) = (72 + 2x)(126 - 3x).$$

En développant cette expression, on a $R(x) = -6x^2 + 36x + 9072$. Nous voulons déterminer le maximum de cette fonction. Le graphique de R est une parabole qui s'ouvre vers le bas. Donc, le maximum de R est la valeur k du sommet (h,k) du graphique.

Nous pouvons déterminer h et k par:

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-36}{2(-6)} = 3 \quad \text{et} \quad k = R(3) = -6(3)^2 + 36(3) + 9072 = 9126.$$

Par conséquent, le revenu quotidien maximum de l'hôtel est de $9\,126\,\$$. Le gérant de l'hôtel doit établir ses tarifs à $126 - 3(3) = 117\,\$$ la chambre, et le nombre de client par jour sera $72 + 2(3) = 78$. La différence entre le revenu maximum et le revenu actuel quotidien est $9126\,\$ - 9072\,\$ = 54\,\$$.

La différence entre le revenu maximum et le revenu actuel est de $54\,\$$.

20. Soit x la longueur de FE et y celle de HF. Observons que x est aussi la longueur de GD et BC. Comme les parallélogrammes $BGDC$ et $GDEF$ sont semblables, nous avons le rapport

$$\frac{CD}{FE} = \frac{GD}{DE}.$$

Or nous savons que $CD = 50$, $FE = x$, $GD = x$ et $DE = 8$. Donc, ce rapport devient $\frac{50}{x} = \frac{x}{8}$. Le produit en croix donne alors $x^2 = 400$, et donc $x = \sqrt{400} = 20$. Comme les parallélogrammes $ABFH$ et $BGDC$ sont aussi semblables, nous avons également le rapport

$$\frac{HF}{CD} = \frac{BF}{GD}.$$

Avec $HF = y$, $CD = 50$, $BF = 50 + 8 = 58$ et $GD = x = 20$, ce rapport devient $\frac{y}{50} = \frac{58}{20}$. Ainsi $y = (58)(50)/20 = 145$. Par conséquent les côtés du parallélogramme mesurent $AH = CE = 58$ et $AC = HE = x + y = 20 + 145 = 165$. Le périmètre est $2(58) + 2(165) = 446\,hm$.

Le périmètre de la ferme est $446\,hm$.

21. Nous calculons les coordonnées de P en résolvant le premier système d'équations par élimination. Multiplions la première équation par 4, sans toucher à la seconde, pour obtenir le système équivalent

$$10x - 8y = 16$$

$$10x + 3y = 49.$$

Soustrayons ces deux équations pour obtenir $-11y = -33$, et $y = 3$. Remplaçons ensuite $y = 3$ dans la seconde équation. Cela donne $10x + 3(3) = 49$ et $x = 4$. Ainsi $P = (4{,}3)$.

Pour obtenir les coordonnées du point Q, nous allons résoudre le deuxième système par la méthode par substitution. Remplaçons x dans la première équation par $y-11$ pour obtenir $2(y-1) = 3(y-11)$. En développant cette expression, on a $2y-2 = 3y-33$ et $y = 31$. Ainsi, $x = y-11 = 31-11 = 20$ et donc $Q = (20{,}31)$. Nous sommes alors prêts à calculer la pente du segment PQ, soit

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{31-3}{20-4} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4}.$$

La pente du segment PQ est $\frac{7}{4}$.

22. On utilise la formule de la distance entre deux points pour obtenir la longueur des trois côtés,

$$m\,\overline{PR} = \sqrt{(26-7)^2 + (47-9)^2} \approx 42{,}49,$$
$$m\,\overline{RQ} = \sqrt{(26-39)^2 + (47-28)^2} \approx 23{,}02,$$
$$m\,\overline{PQ} = \sqrt{(39-7)^2 + (28-9)^2} \approx 37{,}22.$$

Ensuite, on utilise la loi des cosinus pour trouver l'angle en Q,

$$42{,}49^2 = 23{,}02^2 + 37{,}22^2 - 2(23{,}02)(37{,}22)(\cos Q).$$

Ainsi, $\cos Q = 0{,}064$. Ce qui implique que $Q = \cos^{-1}(0{,}064) \approx 86°$.

La mesure de l'angle Q est approximativement $86°$.

23. Soit r le rayon de base du cylindre, qui est le même que le rayon du cône. Comme l'aire du disque supérieur du cylindre est $32{,}12$, on a l'équation $\pi r^2 = 32{,}12$, d'où $r \approx 3{,}198$. Le volume total du cône et du cylindre est $100\,ml = 100\,cm^3$. Comme le cône et le cylindre ont le même volume, étant des solides équivalents, on en déduit que chacun de ces solides a un volume $50\,ml = 50\,cm^3$. Le volume du cône égale l'aire de sa base fois sa hauteur divisée par 3. Remarquons que l'aire de base du cône est la même que celle du cylindre qui est $32{,}12\,cm^2$. Soit h la hauteur du cône, on obtient l'équation $50 = \frac{32{,}12h}{3}$; d'où $h = \frac{3(50)}{32{,}12} \approx 4{,}670$. Soit s l'apothème du cône, la mesure que nous cherchons. Dans le cône, le rayon r, la hauteur h et l'apothème s forment un triangle rectangle. Par le théorème de Pythagore, on a $h^2 + r^2 = s^2$, soit $4{,}670^2 + 3{,}198^2 = s^2$. Cela implique que $s \approx 5{,}66\,cm$.

La base inclinée du verre est approximativement $5{,}66\,cm$.

24. Évidemment, l'aire du rectangle entier est la somme des aires du triangle et de la région hachurée. Cela s'exprime mathématiquement par

$$(5x)(3x-1) = 16 + (12x^2 - x - 1).$$

En développant cette expression et en ramenant tous les membres de l'égalité du même côté, on obtient l'équation quadratique

$$3x^2 - 4x - 15 = 0.$$

On a la factorisation

$$(3x+5)(x-3) = 0.$$

Les deux solutions à cette équation sont $x = -\frac{5}{3}$ et $x = 3$. Comme le côté DC du rectangle mesure $5x$, on voit que x ne peut être égal à $-\frac{5}{3}$ (puisqu'un rectangle ne peut avoir un côté de longueur négative). Par conséquent, $x = 3$, $AD = 3x - 1 = 3(3) - 1 = 8$ et $DC = 5x = 5(3) = 15$. On en conclut que l'aire du rectangle $ABCD$ est $(AD)(DC) = (8)(15) = 120\,cm^2$.

L'aire du rectangle $ABCD$ est $120\,cm^2$.

25. D'abord, nous déterminons l'équation de la parabole. Elle a son sommet en $(12{,}25)$ et passe par le point $(21{,}1)$. L'équation canonique $y = a(x-h)^2 + k$ devient $y = a(x-12)^2 + 25$. En y substituant le point $(21{,}1)$, on obtient $1 = a(21-12)^2 + 25$ et $a = -\dfrac{24}{81} = -\dfrac{8}{27}$. L'équation de la parabole est $y = -\dfrac{8}{27}(x-12)^2 + 25$. La fusée atterrit en l'une des abscisses à l'origine de la parabole. Les abscisses à l'origine de la parabole sont

$$x = h \pm \sqrt{\frac{-k}{a}} = 12 \pm \sqrt{\frac{-25}{(\frac{-8}{27})}} \approx 12 \pm 9{,}2.$$

Ainsi les deux abscisses à l'origine sont $12 - 9{,}2 = 2{,}8$ et $12 + 9{,}2 = 21{,}2$. Le diagramme nous indique que la fusée atterrit au point $(2{,}8\,,0)$ et la base du mat est en $(12{,}0)$. La distance entre ces deux points est $12 - 2{,}8 = 9{,}2\,m$.

La fusée atterrit approximativement à $9{,}2$ mètres du mat.