Examen 4 - solutions

Partie A

1.	A	6.	A
2.	D	7.	C
3.	C	8.	C
4.	C	9.	A
5.	A	10.	C

Partie B

11. Le système a une solution: $(1{,}9)$.
12. La poutre SU mesure approximativement $477\,cm$.
13. Le quotient est égal à $4x^2 - x + 5$.
14. La note de Patricia est dans le 31ème rang centile.
15. La longueur de l'hypoténuse est $15\,m$.
16. L'équation de la droite L_2 est $y = -0{,}2x - 0{,}32$.

Partie C

17. La longueur de la sculpture est approximativement $17\,cm$.
18. La longueur de DC est approximativement $11{,}3$ pieds.
19. Le prix d'achat initial est $115\,000\,\$$.
20. L'aire du triangle ASR est $643{,}5$ unités carrées.
21. Au 47ème jour, la compagnie F reçoit 408 visites sur son site web.
22. Les coordonnées de B sont $(3{,}2\,,6{,}4)$.
23. La longueur du côté RS est $2\sqrt{3}$ unités.
24. Les déménageurs utilisent 4 petits cartons, 4 cartons moyens et 7 grands cartons.
25. Voir le solutionnaire pour les preuves.

Examen 4 - solutions
Partie A

1. Nous voulons trouver h et k tels que $g(x) = f(x-h)+k$. Ici, h est la translation horizontale, et k la translation verticale nécessaires pour juxtaposer le graphique de f à celui de g. Pour cela, *choisissons un point précis, soit par exemple* $(4,-4)$, *sur le graphique* de f. Le point correspondant sur le graphique de g est $(-3{,}0)$. Pour aller de $(4,-4)$ à $(-3{,}0)$, on se déplace de 7 unités vers la gauche et de 4 unités vers le haut. Cela signifie que $h = -7$ et $k = 4$. Donc, la bonne réponse est $g(x) = f(x - -7) + 4$, ou encore $g(x) = f(x+7)+4$.

La bonne réponse est A.

2. Soient h la hauteur du cylindre et r son rayon. Soient H la hauteur du cône et R son rayon. Comme l'aire des deux bases est la même, nous savons que $\pi R^2 = \pi r^2$. En divisant les deux membres de cette égalité par π, on a $R^2 = r^2$; et en prenant la racine carrée des deux côtés, on obtient $R = r$. Donc, le rayon du cône est égal à celui du cylindre. Le volume du cylindre est $\pi r^2 h$, et celui du cône est $\pi R^2 H/3$. Comme les deux solides ont le même volume, on sait que $\pi r^2 h = \pi R^2 H/3$. Mais $R = r$; cela revient donc au même de dire que $\pi r^2 h = \pi r^2 H/3$. En divisant les deux membres de l'égalité par πr^2, on trouve $h = H/3$. Ainsi, $H = 3h$. Donc, la hauteur du cône est le triple de la hauteur du cylindre.

La bonne réponse est D.

3. Le graphique coupe l'axe des abscisses du côté positif, donc le zéro de f est positif. Le graphique coupe l'axe des ordonnées du côté négatif, donc l'ordonnée à l'origine de f est négative.

La bonne réponse est C.

4. Lorsque nous connaissons les trois sommets d'un triangle, comme c'est le cas ici, nous pouvons calculer l'aire de celui-ci de diverses façons. On peut dessiner un rectangle autour du triangle et procéder comme dans les exercices 4.20 et 9.22. On peut également utiliser la formule de Héron, comme nous allons le faire ici. Pour se faire, on rappelle que la formule de Héron dit que, si les côtés d'un triangle mesure respectivement a, b et c, et que nous posons $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, alors l'aire de ce triangle est donnée par la formule

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Pour calculer les longueurs des côtés du triangle, on utilise la formule de la distance,

$$PQ = \sqrt{(-37-2)^2 + (45 - -19)^2} = \sqrt{5617} \approx 74{,}95,$$

$$QR = \sqrt{(2-80)^2 + (-19-5)^2} = \sqrt{6660} \approx 81{,}61,$$

$$RP = \sqrt{(80 - -37)^2 + (5-45)^2} = \sqrt{15289} \approx 123{,}65.$$

Dans la formule de Héron, on prend $a = 74{,}95$, $b = 81{,}61$ et $c = 123{,}65$. La valeur de s est alors $s = (a+b+c)/2 = (74{,}95 + 81{,}61 + 123{,}65)/2 = 140{,}105$, et l'aire de ΔPQR est

$$A = \sqrt{140{,}105(140{,}105 - 74{,}95)(140{,}105 - 81{,}61)(140{,}105 - 123{,}65)} \approx 2964.$$

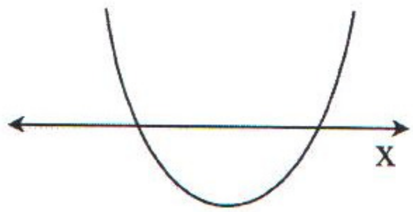
Le nombre 2964 est dans l'intervalle $[2500{,}3000[$.

La bonne réponse est C.

5. Notre situation se décrit par une relation de la forme $y = ax + b$, où x est le nombre d'heures travaillées et y le coût du travail effectué. Cette droite passe par les points $(3{,}121)$ et $(7{,}249)$. La pente de la droite est égale à $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{249 - 121}{7-3} = 32$. Donc, $y = 32x + b$. Pour obtenir b, on substitue le point $(3{,}121)$ dans l'équation de la droite. Cela donne $121 = 32(3) + b$, et donc $b = 25$. Ainsi l'équation est $y = 32x + 25$, ce qui signifie que les frais de déplacement sont de $25\,\$$ et le taux horaire de $32\,\$$. Le coût d'un travail de 2 heures est $y = 32(2) + 25 = 89\,\$$.

La bonne réponse est A.

6. Le graphique de f est une parabole. Comme $a > 0$, la parabole s'ouvre vers le haut ainsi la fonction admet un minimum. Comme $k < 0$, le sommet de la parabole est en dessous de l'axe des abscisses. On a le dessin approximatif suivant:



Le graphique doit donc couper l'axe des abscisses deux fois, ce qui revient au même de dire que la fonction a deux zéros.

La bonne réponse est A.

7. Supposons que nous ayons une droite de la forme $Ax + By = C$, avec $B \neq 0$, et que nous voulons déterminer la pente. On résoud l'équation en fonction de y pour obtenir $y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$. Ainsi, la pente de $Ax + By = C$ est $-\frac{A}{B}$. On peut utiliser cette formule pour déterminer les pentes de toutes les droites données dans cette question. Rappelons que, si deux droites sont perpendiculaires, alors la pente de l'une est l'opposée de l'inverse de la pente de l'autre. Dans la réponse C, la pente de la première droite est $-\left(\frac{3}{-2}\right) = \frac{3}{2}$ et la pente de la seconde droite $-\left(\frac{-2}{-3}\right) = -\frac{2}{3}$. Comme $\frac{3}{2}$ est l'opposé de l'inverse de $-\frac{2}{3}$, la bonne réponse doit être C.

La bonne réponse est C.

8. Observons d'abord que le premier énoncé est faux. En effet, si deux angles d'un triangle sont égaux aux angles homologues d'un autre triangle, cela implique que les deux triangles sont semblables mais non nécessairement isométriques. Ensuite, observons que les réponses B, C et D correspondent respectivement à la condition CAC, la condition ACA et la condition CCC pour les triangles isométriques. On peut déterminer l'angle $\angle ACB$ comme suit

$$\angle ACB = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - 37° - (69° + 37°) = 37°.$$

Remarquons que $\angle ACB = 37° = \angle DBC$ et $\angle ABC = 69° + 37° = 106° = \angle DCB$, et que le côté BC est commun aux triangles ABC et DCB. Par conséquent, par la condition ACA pour triangles isométriques, on sait que ΔABC et ΔDCB sont isométriques.

La bonne réponse est C.

9. Le carré d'un binôme doit comprendre 3 termes, en d'autres termes il doit être un trinôme. Donc les réponses C et D sont sûrement fausses. Un trinôme qui est un carré parfait n'a jamais deux coefficients négatifs. Par conséquent, la réponse B est fausse. Observons que, pour la réponse A, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$ et $2(4)(5) = 40$, donc $16x^2 - 40xy + 25y^2 = (4x - 5y)^2$ est le carré d'un binôme.

La bonne réponse est A.

10. Ces données comportent un total de 100 nombres, soit le nombre de participant à l'expérience. Comme $100 \div 5 = 20$, on doit avoir 20 nombres dans chaque rang cinquième. En comptant, on voit que les rangs cinquièmes sont les suivants: le rang cinquième 5 commence à 60 et se termine au dernier 73, le rang cinquième 4 commence au premier 76 et se termine à 85, le rang cinquième 3 commence au premier 87 et se termine au dernier 93, le rang cinquième 2 commence à 94 et se termine au dernier 111, et le dernier rang cinquième 1 commence à 112 et se termine à 119. Ainsi, on voit que toutes les réponses sont vraies sauf C, puisque 111 est dans le rang cinquième 2.

La bonne réponse est C.

Examen 4 - solutions
Partie B

11. Développons la première équation pour obtenir $16x^2 = 2y - 2$, ensuite divisons les deux membres par 2. On a alors $8x^2 = y - 1$. En résolvant cela en fonction de y, on obtient $y = 8x^2 + 1$. En résolvant la deuxième équation en fonction de y, cela donne $y = 16x - 7$. Par la méthode de comparaison, on aboutit à l'équation $8x^2 + 1 = 16x - 7$, ou plus simplement $8x^2 - 16x + 8 = 0$. En divisant les deux membres par 8, on a $x^2 - 2x + 1 = 0$. On peut ensuite factoriser cette équation pour obtenir $(x-1)(x-1) = 0$. Cela implique que $x = 1$. Quand $x = 1$, on a $y = 16(1) - 7 = 9$.

Ce système a une solution: $(1{,}9)$**.**

12. Nous allons utiliser la trigonométrie du triangle rectangle à deux reprises. D'abord, pour le triangle rectangle RTU, on a le rapport

$$\sin 24 = \frac{TU}{8},$$

ainsi $TU = 8(\sin 24) \approx 3{,}254$. Ensuite, pour le triangle rectangle STU, on a le rapport

$$\cos 47 = \frac{3{,}254}{SU},$$

d'où $SU = 3{,}254/(\cos 47) \approx 4{,}77\,m = 477\,cm$.

La poutre SU **mesure approximativement** $477\,cm$**.**

13. Le quotient est égal à $4x^2 - x + 5$**.**

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4x^2 & -x & +5 & \\
\hline
2x+3 & 8x^3 & +10x^2 & +7x & +15 \\
 & 8x^3 & +12x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -2x^2 & +7x & \\
 & & -2x^2 & -3x & \\
\cline{3-4}
 & & & 10x & +15 \\
 & & & 10x & +15 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

14. En excluant Patricia, il y a $18+2=20$ étudiants qui ont travaillé moins bien ou aussi bien que Patricia à l'examen. Patricia incluse, cela fait donc $20+1=21$ étudiants. Son rang centile est

$$\frac{21}{68}\times 100 = 31\text{ème rang centile.}$$

La note de Patricia est dans le 31ème rang centile.

15. Remarquons que $\angle AEC = \angle BDC = 90°$ et $\angle ACE = \angle BCD$. Par la condition AA pour triangles semblables, on sait que ΔAEC et ΔBDC sont des triangles semblables. Nous avons donc le rapport

$$\frac{AE}{BD} = \frac{EC}{DC}.$$

Soit x la longueur du côté DC. Alors la longueur du côté EC est $4+x$. Le rapport devient donc

$$\frac{9}{6} = \frac{4+x}{x}.$$

Le produit en croix donne $9x = 6(4+x)$, ce qui implique que $x=8$. Donc la mesure de DC est 8, et celle de EC est $4+8=12$. On peut alors déterminer la mesure de l'hypoténuse AC en utilisant le théorème de Pythagore, soit

$$AC = \sqrt{9^2+12^2} = \sqrt{225} = 15\,m.$$

La longueur de l'hypoténuse est $15\,m$.

16. Nous pouvons obtenir l'abscisse à l'origine de la droite L_1 en posant $y=0$. Cela donne l'équation $0=5x+8$, d'où $x=-\frac{8}{5}=-1{,}6$. Cela signifie que l'intersection de la droite L_1 avec l'axe des x est $(-1{,}6\,,0)$. Par conséquent, l'intersection de la droite L_2 avec l'axe des x est aussi $(-1{,}6\,,0)$. La pente de la droite L_1 est 5. Comme la droite L_2 est perpendiculaire à la droite L_1, on sait que la pente de la droite L_2 est l'opposé de l'inverse de la pente de la droite L_1. Donc la pente de la droite L_2 est $-\frac{1}{5}=-0.2$, et celle-ci passe par le point $(-1{,}6\,,0)$. Soit $y=ax+b$ l'équation de la droite L_2. On sait que $a=-0{,}2$, donc l'équation est de la forme $y=-0{,}2x+b$. En y substituant le point $(-1{,}6\,,0)$, cela donne $0=-0{,}2(-1{,}6)+b$; d'où $b=-0{,}32$.

L'équation de la droite L_2 est $y=-0{,}2x-0{,}32$.

Examen 4 - solutions
Partie C

17. Comme la sphère et le cône ont le même volume et que leur volume total est de $200\,cm^3$, ils doivent avoir chacun un volume de $100\,cm^3$. Soit r le rayon de la sphère. La formule du volume d'une sphère est

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{qui devient} \quad 100 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Cela implique que $r^3 = \dfrac{3(100)}{4\pi} \approx 23{,}87$, ainsi donc $r = \sqrt[3]{23{,}87} \approx 2{,}88\,cm$. Donc le cône et la sphère ont chacun un rayon de $2{,}88\,cm$. Soit h la hauteur du cône. La formule du volume du cône est

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad \text{qui devient} \quad 100 = \frac{\pi(2{,}88)^2 h}{3}.$$

Cela implique que $h = \dfrac{3(100)}{\pi(2{,}88)^2} \approx 11{,}5\,cm$. La longueur de la sculpture est égale à la somme de la hauteur du cône et du diamètre de la sphère, soit $2r + h = 2(2{,}88) + 11{,}5 \approx 17\,cm$.

La longueur de la sculpture est approximativement $17\,cm$.

18. Dans le triangle ABD, on peut déterminer l'angle $\angle ADB$ par la loi des sinus. On a le rapport

$$\frac{8}{\sin 40} = \frac{12}{\sin(\angle ADB)}.$$

D'où, $\sin(\angle ADB) \approx 0{,}964$. Nous sommes dans l'ambiguité de la loi sinus. Comme $\sin^{-1}(0{,}964) \approx 74{,}6°$, on a $\angle ADB = 74{,}6°$ ou $\angle ADB = 180° - 74{,}6° = 105{,}4°$. Mais comme $\angle ADB$ est obtus, on conclut que $\angle ADB = 105{,}4°$. Par conséquent, $\angle CDB = 180° - 105{,}4° = 74{,}6°$. Remarquons que le triangle ABC est un triangle isocèle puisque les côtés BA et BC ont la même mesure, soit 12. Cela implique que $\angle BCD = 40°$, puisque $\angle BAD = 40°$. D'où $\angle DBC = 180° - 40° - 74{,}6° = 65{,}4°$. *On peut maintenant appliquer* la loi des sinus au triangle BDC. On obtient le rapport

$$\frac{8}{\sin 40} = \frac{DC}{\sin 65{,}4}.$$

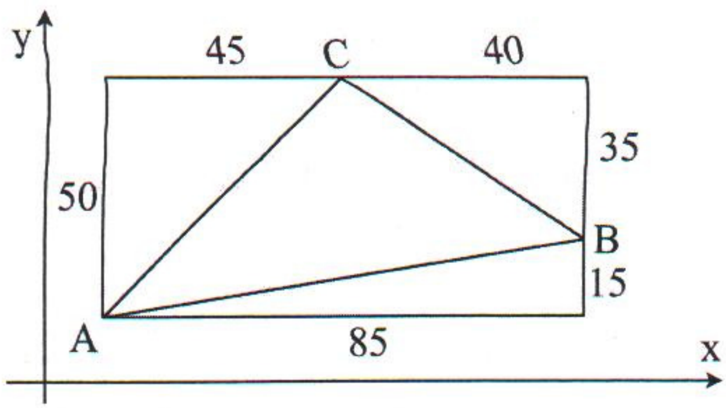
Ce qui donne $DC \approx 11{,}3$ pieds.

La longueur de DC est approximativement $11{,}3$ pieds.

19. Le sommet de cette parabole est situé en $(h,k) = (3{,}97)$. Par conséquent, son équation est de la forme $y = a(x-3)^2 + 97$. Comme la parabole passe par le point $(8{,}147)$, en y substituant ce point, on obtient $147 = a(8-3)^2 + 97$. Ce qui donne $a = 2$. D'où l'équation de la parabole est donnée par $y = 2(x-3)^2 + 97$. Pour déterminer le prix d'achat initial de la propriété, on pose $x = 0$. Cela donne $y = 2(0-3)^2 + 97 = 115$.

Le prix d'achat initial est de $115\,000\,\$$.

20. On détermine d'abord l'aire du triangle ABC. Dessinons un rectangle autour de ce triangle, et déterminons les mesures de tous les côtés comme dans le diagramme ci-dessous.



L'aire du rectangle est $(85)(50) = 4250$. Les aires des trois triangles rectangles contenus dans le rectangle sont respectivement $(50)(45)/2 = 1125$, $(40)(35)/2 = 700$ et $(85)(15)/2 = 637{,}5$. Ainsi, l'aire du triangle ABC est $4250 - 1125 - 700 - 637{,}5 = 1787{,}5$.

Soit p le rapport de l'homothétie. Par définition $p = \dfrac{AS}{AB}$. La valeur de p égale la fraction F en laquel le point S partage le segment AB. Nous pouvons déterminer celui-ci en utilisant la formule $F = \dfrac{x_d - x_1}{x_2 - x_1}$. Ici, on a $x_1 = 14$, $x_2 = 99$ et $x_d = 65$. Ce qui donne

$$F = \frac{65 - 14}{99 - 14} = \frac{51}{85} = \frac{3}{5}.$$

Ainsi, $p = \dfrac{3}{5}$. Comme le triangle ASR est l'image du triangle ABC, on sait que l'aire du triangle ASR est égale à l'aire du triangle ABC multipliée par p^2. Donc, l'aire du triangle ASR est $1787{,}5\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 643{,}5$ unités carrées.

L'aire du triangle ASR est $643{,}5$ unités carrées.

21. Nous devons d'abord trouver le jour où les deux compagnies reçoivent chacune 656 visites sur leurs sites web respectifs. Pour cela nous devons résoudre l'équation $g(x) = 656$; c'est-à dire $-(x-28)^2 + 800 = 656$, ou plus simplement $-(x-28)^2 + 144 = 0$. Cette équation a $a = -1$, $h = 28$, $k = 144$, d'où

$$x = h \pm \sqrt{\frac{-k}{a}} = 28 \pm \sqrt{\frac{-144}{-1}} = 28 \pm \sqrt{144} = 28 \pm 12.$$

Donc $x = 28 + 12 = 40$ ou $x = 28 - 12 = 16$. Nous devons choisir laquelle des solutions $x = 16$ ou $x = 40$ est valable. Mais le sommet de la parabole g est $(28{,}800)$ et, par le diagramme, le point d'intersection des deux graphiques ayant pour ordonnée 656 se trouve à gauche du sommet. Cela implique donc que $x = 16$. D'où $(16{,}656)$ et $(48{,}400)$ sont deux points situés sur la droite. La pente de celle-ci est donc $\dfrac{656-400}{16-48} = \dfrac{256}{-32} = -8$, et $f(x) = -8x + b$. Pour obtenir b, on y substitue le point $(16{,}656)$. Cela donne $656 = -8(16) + b$, et $b = 784$. Par conséquent, $f(x) = -8x + 784$ et le nombre de visites reçues par la compagnie F au 47ème jour est $f(47) = -8(47) + 784 = 408$.

Au 47ème jour, la compagnie F reçoit 408 visites sur son site web.

22. L'abscisse à l'origine de la droite AC est 16 et son ordonnée à l'origine est 8. D'où $A = (0{,}8)$ et $C = (16{,}0)$. La pente de la droite AC est $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{0-8}{16-0} = -\dfrac{1}{2}$. Comme OB est perpendiculaire à AC, sa pente est égale à l'opposé de l'inverse de celle de AC. Comme la pente de AC est $-\dfrac{1}{2}$, on obtient que la pente de OB est 2. Ainsi, la droite OB a une ordonnée à l'origine égale à 0 et une pente 2. Par conséquent, l'équation de la droite OB est $y = 2x$. Pour déterminer les coordonnées du point B, il nous reste tout simplement à calculer le point d'intersection des droites AC et OB. Cela revient à résoudre le système d'équations:

$$\frac{x}{16} + \frac{y}{8} = 1 \qquad \text{et} \qquad y = 2x.$$

En utilisant la méthode par substitution, on obtient $\dfrac{x}{16} + \dfrac{2x}{8} = 1$. On multiplie les deux membres de cette égalité par 16 pour éliminer les dénominateurs. Cela donne $x + 4x = 16$, et $x = 3{,}2$. Comme $y = 2x$, on trouve $y = 2(3{,}2) = 6{,}4$.

Les coordonnées de B sont $(3{,}2\,,6{,}4)$.

23. Les triangles PQS et RQP sont semblables par la condition AA. Cela nous donne le rapport
$$\frac{PQ}{RQ} = \frac{QS}{QP} \quad \text{qui devient} \quad \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{QS}{3}.$$
En faisant le produit en croix, on a $QS = \dfrac{9}{\sqrt{3}}$. En rationalisant le dénominateur, on a
$$QS = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}.$$
On obtient que le côté RS mesure $QS - QR = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

La longueur du côté RS est $2\sqrt{3}$ unités.

24. Soit x le nombre de petits cartons utilisés au cours du déménagement. Alors, x est aussi le nombre de cartons moyens utilisés. Soit y le nombre de grands cartons utilisés. Comme le nombre total de carton utilisés est de 15, on obtient l'équation $x + x + y = 15$. Et comme le volume total des cartons utilisés est de $4\,094$, on a la seconde équation $36x + 200x + 450y = 4094$. Par simplification, ces deux équations deviennent $2x + y = 15$ et $236x + 450y = 4094$. En multipliant la première par 450 sans toucher à la seconde, on obtient le systéme équivalent
$$900x + 450y = 6750$$
$$236x + 450y = 4094.$$
En soustrayant ces deux équations, on a $664x = 2656$, ce qui donne $x = 4$. En substituant $x = 4$ dans l'équation $2x + y = 15$, on a $2(4) + y = 15$ et $y = 7$.

Les déménageurs ont utilisés 4 petits cartons, 4 cartons moyens et 7 grands cartons.

25. Les coordonnées de A sont $(0{,}0)$ et les coordonnées de H sont $(r{,}0)$. Pour trouver la longueur du segment AB on peut utiliser la formule de la distance,

$$m\,\overline{AB} = \sqrt{(r-0)^2 + (s-0)^2} = \sqrt{r^2 + s^2}.$$

Il est clair que $m\,\overline{AH} = r$ et $m\,\overline{AC} = t$. Ainsi, pour établir la relation

$$(m\,\overline{AB})^2 = (m\,\overline{AH})(m\,\overline{AC}),$$

il nous faut montrer que $(\sqrt{r^2+s^2})^2 = rt$, c'est-à-dire $r^2 + s^2 = rt$.

Pour montrer que $r^2 + s^2 = rt$, nous allons considérer les pentes des segments AB et BC. La pente de AB est $\frac{s}{r}$ et celle de BC est $\frac{-s}{t-r}$. L'opposé de l'inverse de la pente de BC est $\frac{t-r}{s}$. Comme AB et BC sont perpendiculaire, on sait que l'opposé de l'inverse de la pente de BC égale la pente de AB. Cela donne l'équation

$$\frac{s}{r} = \frac{t-r}{s}.$$

En faisant le produit en croix, on a $s^2 = rt - r^2$, c'est-à-dire $r^2 + t^2 = rt$. Ce qu'il fallait montrer.