Examen 7 - solutions

Partie A

1.	D	6.	D
2.	A	7.	B
3.	C	8.	B
4.	A	9.	C
5.	B	10.	A

Partie B

11. 5 porcs doivent être testés.
12. La mesure de l'angle ABD est $119°$.
13. La hauteur du petit cône est approximativement $10{,}4\,m$.
14. L'expression simplifiée est $\dfrac{-55q^3+10q^2+45}{12q^4}$.
15. L'angle ACE mesure $90°$.
16. La distance entre O et M est approximativement $13{,}5$ unités.

Partie C

17. Les coordonnés sont $A=(-4{,}6)$ et $B=(24,-8)$.
18. La hauteur de la pyramide est $48\,cm$.
19. Le plongeur est $7.8\,m$ en dessous de la surface de l'eau, 3 secondes avant de remonter à la surface.
20. Le périmètre est approximativement $6{,}5\,cm$.
21. La mesure de AP est approximativement 43 unités.
22. Le rapport de l'homothétie est approximativement $-0{,}178$.
23. Le périmètre est approximativement $50\,cm$.
24. L'aire du triangle est $3\,185$ unités carrées.
25. La distance entre B et E est approximativement 79 unités.

Examen 7 - solutions
Partie A

1. La droite ℓ passe par les points $(p,0)$ et $(0,q)$. La pente de ℓ est donc égale à

$$\frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{q-0}{0-p} = -\frac{q}{p}.$$

Toute droite parallèle à ℓ doit avoir la même pente. La seule droite dont la pente est égale à $-\frac{q}{p}$ est celle de la réponse D.

La bonne réponse est D.

2. Soit p le rapport de similitude des deux solides, avec $p > 1$. On a

$$p^2 = \frac{\text{aire de la face avant du grand solide}}{\text{aire de la face avant du petit solide}} = \frac{867}{300} = 2{,}89.$$

D'où $p = \sqrt{2{,}89} = 1{,}7$. On peut maintenant calculer le volume du petit solide par

$$\text{volume du petit solide} = (\text{volume du grand solide}) \div p^3 = 9826 \div 1{,}7^3 = 2\,000\,m^3.$$

La bonne réponse est A.

3. Les seuls participants à même de savoir le nombre de compétitions auxquelles les chiens ont participé sont les propriétaires de chiens eux-même. Ainsi, la réponse A ne peut être bonne puisque cela n'a aucun sens de demander ni aux juges, ni aux spectateurs les renseignements concernant un chien. La réponse D est aussi fausse puisqu'aucun chien ne peut répondre. La réponse B est logique, mais l'échantillon doit prendre en compte le fait qu'il y a un nombre différent de propriétaires de chiens et de chiennes. Donc B est faux. Soit x le nombre de propriétaires de chiens (mâles) dans l'échantillon. Le nombre total de propriétaires de chiens et de chiennes est $24 + 36 = 60$. Nous avons donc le rapport $\frac{24}{60} = \frac{x}{20}$, qui donne $x = 8$. L'échantillon doit donc contenir 8 propriétaires de chiens et $20 - 8 = 12$ propriétaires de chiennes.

La bonne réponse est C.

4.

$$\frac{\sqrt{a^{100}}}{b^3} \div \frac{\sqrt{b^{64}}}{a^{-1}} = \frac{(a^{100})^{\frac{1}{2}}}{b^3}\left(\frac{a^{-1}}{(b^{64})^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{a^{50}}{b^3}\left(\frac{a^{-1}}{b^{32}}\right) = \frac{a^{49}}{b^{35}}.$$

La bonne réponse est A.

5. Comme les deux paraboles s'ouvrent vers le bas, on sait que $a < 0$ et $b < 0$. Comme g est plus incurvé que f, on doit avoir $|b| > |a|$. Mais, a et b étant négatifs, cela signifie que $b < a$. En combinant $a < 0$, $b < 0$ et $b < a$ en une inégalité, on obtient $0 > a > b$.

La bonne réponse est B.

6. L'énonce (1) est vrai, (2) est faux, (3) est vrai, (4) est faux, et (5) est vrai.

La bonne réponse est D.

7. Résolvons les deux équations en terme de y. Pour l'équation $\frac{x}{-8} + \frac{y}{12} = 1$, cela donne $y = \frac{3}{2}x + 12$. Et, pour l'équation $-15x + 10y = 120$, cela donne $y = \frac{3}{2}x + 12$. Ces deux droites sont donc la même. Ainsi, le système admet une infinité de solutions.

La bonne réponse est B.

8. La fonction $(f-g)(x)$ est donnée par $f(x)-g(x) = (-4x-2)-(-3x+5) = -x-7$. Ainsi, le graphique de $f-g$ est la droite $y = -x-7$. L'abscisse à l'origine de cette droite est -7, et son ordonnée à l'origine -7. L'abscisse et l'ordonnée à l'origine de f sont toutes les deux négatives. La bonne réponse est donc B.

La bonne réponse est B.

9. Comme les angles $\angle HRQ$ et $\angle PRQ$ sont supplémentaires, on a $\angle PRQ = 180° - 115° = 65°$. Comme les angles $\angle EPG$ et $\angle RPQ$ sont opposés par le sommet, on a $\angle RPQ = 55°$. La somme des angles du triangle PRQ est $180°$, d'où $\angle RQP = 180° - 65° - 55° = 60°$. Comme les angles $\angle RQP$ et $\angle DQP$ sont supplémentaires, on sait que angles $\angle DQP = 180° - 60° = 120°$.

La bonne réponse est C.

10. Factorisons l'expression comme suit:

$$x^2(x^2-1)-2x(x^2-1)=(x^2-1)(x^2-2x)=(x-1)(x+1)(x)(x-2).$$

La somme de ces quatre facteurs est $(x-1)+(x+1)+(x)+(x-2)=4x-2$.

La bonne réponse est A.

Examen 7 - solutions

Partie B

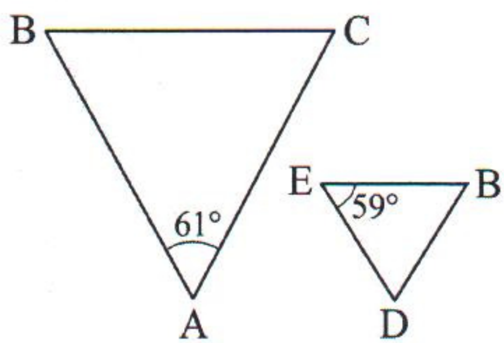
11. Le nombre total d'animaux est $32 + 40 + 16 + 24 = 112$. Soit x le nombre de porcs que l'échantillon doit comprendre pour être représentatif. En utilisant la formule

$$\frac{\text{taille du groupe}}{\text{taille de la population}} = \frac{\text{taille d'échantillon du groupe}}{\text{taille de l'échantillon}},$$

on obtient, pour le nombre de porcs, que $\dfrac{40}{112} = \dfrac{x}{14}$. D'où $x = 5$.

5 **porcs doivent être testés.**

12. D'abord, disposons les deux triangles l'un à côté de l'autre de sorte qu'ils aient la même orientation.



Comme les deux triangles sont semblables, deux angles homologues doivent être égaux. D'où $\angle ABC = 59°$ et $\angle BDE = 61°$. Ainsi, $\angle EBD = \angle BCA = 180° - 61° - 59° = 60°$; et

$$\angle ABD = \angle ABC + \angle EBD = 59° + 60° = 119°.$$

La mesure de l'angle ABD **est** $119°$.

13. Soit p le rapport de similitude, avec $p > 1$. Alors, $p^2 = \dfrac{216}{150} = 1{,}44$, d'où $p = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$. Soit h la hauteur du petit cône, s son apothème et r son rayon de base. Par le théorème de Pythagore, $r^2 + h^2 = s^2$. L'apothème du petit cône est égale à l'apothème du grand cône divisée par p. D'où $s = 15 \div p = 15 \div 1{,}2 = 12{,}5\,m$. Nous savons que l'aire de la base du petit cône est 150, d'où $\pi r^2 = 150$, et $r = \sqrt{\dfrac{150}{\pi}} \approx 6{,}91\,m$. Ainsi, l'équation $r^2 + h^2 = s^2$ implique que $6{,}91^2 + h^2 = 12{,}5^2$, d'où $h \approx 10{,}4\,m$.

La hauteur du petit cône est approximativement $10{,}4\,m$.

14.

$$\begin{aligned}
\frac{5}{2q}\left(\frac{q+2}{6q} - 2 + \frac{3}{2q^3}\right) &= \frac{5q+10}{12q^2} - \frac{10}{2q} + \frac{15}{4q^4} \\
&= \frac{q^2(5q+10)}{12q^4} - \frac{6q^3(10)}{12q^4} + \frac{3(15)}{12q^4} \\
&= \frac{5q^3 + 10q^2 - 60q^3 + 45}{12q^4} \\
&= \frac{-55q^3 + 10q^2 + 45}{12q^4}.
\end{aligned}$$

L'expression simplifiée est $\dfrac{-55q^3 + 10q^2 + 45}{12q^4}$.

15. Comme ΔABC et ΔCDE sont isométriques, on sait que BC mesure 4 et CD mesure 5. En appliquant la trigonométrie du triangle rectangle à ΔABC, on a

$$\tan(\angle CAB) = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}.$$

D'où $\angle CAB = \tan^{-1}(\frac{4}{5}) \approx 36{,}66°$, et $\angle ACB = 180° - 90° - 36{,}66° = 53{,}34°$. De même, comme ΔABC et ΔCDE sont isométriques, on sait que $\angle ECD = \angle CAB = 36{,}66°$. D'où

$$\angle ACE = 180° - \angle ECD - \angle ACB = 180° - 36{,}66° - 53{,}34° = 90°,$$

et $\angle ACE = 90°$.

L'angle ACE mesure $90°$.

Solution alternative: On peut résoudre cette question sans utiliser de trigonométrie. En effet, on sait que $\angle CAB + \angle ACB = 90°$ (puisque les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires). Comme $\angle ECD = \angle CAB$, cela revient à dire que $\angle ECD + \angle ACB = 90°$. D'où

$$\angle ACE = 180° - (\angle ECD + \angle ACB) = 180° - 90° = 90°.$$

16. Pour déterminer l'abscisse à l'origine de la droite $2x - 5y - 50 = 0$, on y substitue $y = 0$. Cela donne $2x - 5(0) - 50 = 0$ et $x = 25$, d'où $B = (25{,}0)$. Pour déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite $2x - 5y - 50 = 0$, on y substitue $x = 0$. Cela donne $2(0) - 5y - 50 = 0$ et $y = -10$, d'où $A = (0, -10)$. Le milieu $M = (x_m{,}y_m)$ du segment joignant $A = (0, -10) = (x_1{,}y_1)$ à $B = (25{,}0) = (x_2{,}y_2)$ peut être obtenu en utilisant la formule du point milieu, soit

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 25}{2} = 12{,}5 \qquad \text{et} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-10 + 0}{2} = -5.$$

On obtient $M = (12{,}5\,, -5)$. La distance entre $M = (12{,}5\,, -5)$ et $O = (0{,}0)$ peut être calculer en utilisant la formule de la distance, soit

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(12{,}5 - 0)^2 + (-5 - 0)^2} \approx 13{,}5.$$

La distance entre O et M est approximativement $13{,}5$ unités.

Examen 7 - solutions
Partie C

17. Nous allons d'abord déterminer l'équation de la parabole. Comme son sommet est situé en $(h,k) = (8{,}24)$, son équation est de la forme $y = a(x-8)^2 + 24$. Pour obtenir a, on substitue le point $(0{,}16)$ dans l'équation. Cela donne $16 = a(0-8)^2 + 24$, et $a = -\frac{1}{8} = -0{,}125$. L'équation de la parabole est donc $y = -0{,}125(x-8)^2 + 24$. On cherche maintenant l'équation de la droite. La forme symétrique de celle-ci est $\dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{4} = 1$. En résolvant ceci en terme de y, on a $y = -0{,}5x + 4$. Pour obtenir les coordonnées de A et de B, on doit résoudre le système

$$y = -0{,}125(x-8)^2 + 24 \quad \text{et} \quad y = -0{,}5x + 4.$$

On utilise la méthode de comparaison. Posons que ces deux équations sont égales, soit $-0{,}125(x-8)^2 + 24 = -0{,}5x + 4$. En développant et en ramenant tous les termes du même côté, on a l'équation de second degré $-0{,}125x^2 + 2{,}5x + 12 = 0$. En utilisant la formule quadratique, on a

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2{,}5 \pm \sqrt{(2{,}5)^2 - 4(-0{,}125)(12)}}{2(-0{,}125)} = \frac{-2{,}5 \pm 3{,}5}{-0{,}25}.$$

D'où $x = \dfrac{-2{,}5 + 3{,}5}{-0{,}25} = -4$ ou $x = \dfrac{-2{,}5 - 3{,}5}{-0{,}25} = 24$. Pour $x = -4$, l'ordonnée est égale à $y = -0{,}5x + 4 = -0{,}5(-4) + 4 = 6$, et pour $x = 24$, l'ordonnée est égale à $y = -0{,}5x + 4 = -0{,}5(24) + 4 = -8$.

Les coordonnées sont $A = (-4{,}6)$ **et** $B = (24, -8)$.

18. Le volume du prisme est $(4)(36)(16) = 2\,304\,cm^3$. Comme la base de la pyramide est un carré de périmètre $48\,cm$, le côté de cette base mesure $48 \div 4 = 12\,cm$. Ainsi l'aire de la base de la pyramide est $12^2 = 144\,cm^2$. Soit h la hauteur de la pyramide. Alors, le volume de la pryramide est donné par

$$V = \frac{\text{(aire de base)(hauteur)}}{3} = \frac{144h}{3} = 48h.$$

Comme le prisme et la pyramide ont le même volume, on a l'équation $2304 = 48h$. D'où $h = 48\,cm$.

La hauteur de la pyramide est $48\,cm$.

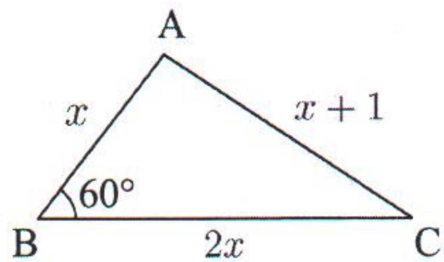
19. Nous devons trouver le temps auquel le plongeur atteint la surface de l'eau à la fin de sa plongée. En ce moment, sa hauteur par rapport à la surface de l'eau est de $0\,m$, nous devons donc résoudre $h(t) = 0$, c'est-à-dire $t^2 - 10t + 17{,}16 = 0$. En utilisant la formule quadratique, on a

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(17{,}16)}}{2(1)} = \frac{10 \pm 5{,}6}{2}.$$

D'où $t = \dfrac{10 + 5.6}{2} = 7.8$ secondes, ou $t = \dfrac{10 - 5.6}{2} = 2.2$ secondes. Nous savons donc que le plongeur à quitter le sommet de la falaise au temps $t = 0$ secondes, atteint la surface de l'eau au temps $t = 2.2$ secondes, et reste immergé jusqu'au temps $t = 7.8$ secondes. Par conséquent, 3 secondes avant que le plongeur ne remonte à la surface est au temps $t = 7.8 - 3 = 4.8$ secondes. Sa profondeur en ce moment est de $h(4.8) = (4.8)^2 - 10(4.8) + 17.16 = -7.8\,m$.

Le plongeur est $7.8\,m$ en dessous de la surface de l'eau, 3 secondes avant de remonter à la surface.

20. Soit x la longueur du côté AB. Alors, AC mesure $x + 1$ et BC mesure $2x$.



Par la loi des cosinus, on a

$$(x + 1)^2 = x^2 + (2x)^2 - 2(x)(2x)(\cos 60).$$

Avec $\cos 60 = 0{,}5$, on a

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x^2 - 4x^2(0{,}5).$$

En simplifiant, on obtient $2x^2 - 2x - 1 = 0$. En utilisant la formule quadratique, on a

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4}.$$

D'où $x = \dfrac{2 - \sqrt{12}}{4} \approx -0{,}366$ ou $x = \dfrac{2 + \sqrt{12}}{4} \approx 1{,}366$. Comme x est positif, on doit avoir $x = 1{,}366\,cm$. Ainsi, le périmètre du triangle ABC est $x + (2x) + (x + 1) = 4x + 1 = 4(1{,}366) + 1 = 6{,}464 \approx 6{,}5\,cm$.

Le périmètre est approximativement $6{,}5\,cm$.

21. La mesure de AP est la distance entre le point A et la droite BC. La pente de la droite joignant B et C est $\dfrac{-23-(-50)}{32-(-40)} = 0{,}375$, d'où l'équation de cette droite est de la forme $y = 0{,}375x + b$. En y substituant le point $(32, -23)$, on a $-23 = 0{,}375(32) + b$, et $b = -35$. L'équation de la droite BC est $y = 0{,}375x - 35$. La distance de cette droite au point $A = (50{,}30)$ est

$$\frac{|ax_1 - y_1 + b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|0{,}375(50) - 30 - 35|}{\sqrt{0{,}375^2+1}} \approx 43\,\text{unités.}$$

La mesure de AP est approximativement 43 unités.

22. Soit h la hauteur du grand cône. La hauteur bissecte l'angle de $48°$ en deux angles de $24°$ chacun. Le rayon, la hauteur et l'apothème du grand cône forment un triangle rectangle auquel nous appliquons la trigonométrie du triangle rectangle. Cela nous donne le rapport

$$\tan 24 = \frac{20}{h},$$

d'où $h \approx 44{,}9207$. On détermine alors le rapport de l'homothétie des deux cônes en faisant le quotient de leur hauteurs. Le numérateur de ce quotient doit être la hauteur du cône image, et le dénominateur la hauteur du cône de départ. Comme c'est le petit cône qui est notre cône image, le rapport de l'homothétie cherché est

$$\frac{\text{hauteur du petit cône}}{\text{hauteur du grand cône}} = \frac{8}{44{,}9207} \approx 0{,}178.$$

Observons que les deux cônes sont de part et d'autre du centre de l'homothétie. Cela signifie que le rapport de l'homothétie doit être négatif. Au millième d'unité près, cela donne $-0{,}178$.

Le rapport de l'homothétie est approximativement $-0{,}178$.

23. Nous devons déterminer les mesures de AB et de BC. En appliquant la trigonométrie du triangle rectangle à ABP, on a $\sin 63 = \dfrac{9}{AB}$. D'où $AB \approx 10{,}10$ et $CD \approx 10{,}10$. Comme deux angles opposés dans un parallélogramme sont congrus, on a $\angle BCD = 63°$. La somme des angle du triangle BCD est égale à $180°$, d'où $\angle BDC = 180° - 41° - 63° = 76°$. On applique la loi des sinus au triangle BCD. Cela donne

$$\frac{CD}{\sin(\angle CBD)} = \frac{BC}{\sin(\angle BDC)}, \quad \text{qui devient} \quad \frac{10{,}10}{\sin 41} = \frac{BC}{\sin 76}.$$

D'où $BC \approx 14{,}94$. Nous avons toutes les mesures des côtés du parallélogramme; elles sont $AB = CD = 10{,}10\,cm$ et $BC = AD = 14{,}94\,cm$. Donc, le périmètre du parallélogramme $ABCD$ est $2(10{,}10) + 2(14{,}94) \approx 50\,cm$.

Le périmètre est approximativement $50\,cm$.

24. Nous devons calculer l'abscisse du point Q. Soit r cette abscisse, d'où $Q = (r{,}184)$. La pente de la droite PQ est $\dfrac{191-184}{110-r} = \dfrac{7}{110-r}$. La pente de la droite RQ est $\dfrac{9-184}{110-r} = \dfrac{-175}{110-r}$. Comme les droites PQ et RQ sont perpendiculaires, la pente de l'une est l'opposé de l'inverse de l'autre. Mais l'inverse de l'opposé de la pente de RQ est $-\left(\dfrac{110-r}{-175}\right) = \dfrac{110-r}{175}$. Donc, on a $\dfrac{110-r}{175} = \dfrac{7}{110-r}$. Le produit en croix donne $(110-r)(110-r) = (175)(7)$. En développant et en simplifiant, on obtient l'équation $r^2 - 220r + 10875 = 0$. La formule quadratique donne

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-220) \pm \sqrt{(-220)^2 - 4(1)(10875)}}{2(1)} = \frac{220 \pm 70}{2}.$$

D'où $r = \dfrac{220+70}{2} = 145$ ou $r = \dfrac{220-70}{2} = 75$. Comme Q est à droite du point $R = (110{,}9)$, son abscisse doit être plus grande que 110. C'est-à dire que $r \neq 75$; on en déduit que $Q = (145{,}184)$. Nous pouvons maintenant calculer l'aire du triangle PQR. Considérons PR comme la base de ce triangle. PR mesure $191 - 9 = 182$. La hauteur du triangle est le segment joignant le point $(110{,}184)$ au point $Q = (145{,}184)$. La hauteur du triangle est donc $145 - 110 = 35$. Ainsi, l'aire du triangle est

$$\frac{\text{(base)(hauteur)}}{2} = \frac{(182)(35)}{2} = 3\,185.$$

L'aire du triangle est $3\,185$ unités carrées.

Solution alternative: Voici une méthode plus rapide. Posons $H = (110{,}184)$. Notons que QH est la hauteur de ΔPQR. Par la condition AA pour triangles semblables, on sait que ΔQHP est semblable à ΔRHQ. D'où le rapport

$$\frac{QH}{PH} = \frac{RH}{QH}.$$

En faisant le produit en croix, on a $(QH)^2 = (PH)(RH)$. Avec $PH = 191 - 184 = 7$ et $RH = 184 - 9 = 175$, on a $(QH)^2 = (7)(175) = 1225$, et $QH = \sqrt{1225} = 35$. Ainsi, l'aire du triangle PQR est

$$\frac{(PR)(QH)}{2} = \frac{(191-9)(35)}{2} = 3\,185 \text{ unités carrées.}$$

25. Comme B est le milieu de AD et C le milieu de BD, il s'ensuit que B est au $\frac{1}{3}$ du chemin entre C et A. Les coordonnées de B peuvent être obtenues par la formule du point de partage. On a

$$x_d = x_1 + F(x_2 - x_1) = 86 + \frac{1}{3}(-13 - 86) = 53$$

$$y_d = y_1 + F(y_2 - y_1) = 1 + \frac{1}{3}(67 - 1) = 23.$$

Soit $B = (53{,}23)$. Comme C est le milieu de BD, on peut utiliser les formules

$$x_2 = 2x_m - x_1 \quad \text{et} \quad y_2 = 2y_m - y_1$$

pour obtenir les coordonnées de D. On voit que

$$x_2 = 2x_m - x_1 = 2(86) - 53 = 119 \quad \text{et} \quad y_2 = 2y_m - y_1 = 2(1) - 23 = -21.$$

D'où $D = (119, -21)$, et conséquemment $E = (119{,}67)$. La distance entre B et E est

$$\sqrt{(119 - 53)^2 + (67 - 23)^2} \approx 79.$$

La distance entre B et E est approximativement 79 unités.