Examen 8 - solutions

Partie A

1.	B	6.	B
2.	C	7.	D
3.	B	8.	B
4.	B	9.	C
5.	C	10.	D

Partie B

11. Les coordonnées du parc sont $(59{,}6\,, 39{,}4)$.
12. La fonction f est positive sur $[-4{,}14]$.
13. La mesure de l'angle BCD est $70°$.
14. La distance entre les droites est approximativement $3{,}2$ unités.
15. L'apothème du petit cône est $5\,cm$.
16. La justification de l'étape 2 est: Angles alternes intérieurs.
    La justification de l'étape 4 est: condition ACA pour triangles isométriques.

Partie C

17. Après dix ans, la différence entre la valeur des deux actions est de $10\,\$$.
18. La note obtenue par ces deux étudiants est 72.
19. Le segment BD mesure approximativement $11{,}4\,cm$.
20. L'aire est de $117{,}6$ unités carrées.
21. L'aire du rectangle hachurée est $2x^2 + 10xy + 12y^2$.
22. Les coordonnées de B sont $(72{,}60)$.
23. Le côté AC mesure 18 unités.
24. La pierre passe à $3{,}4$ pieds au dessus du mur de la forteresse.
25. La peinture des deux silos nécessite 20 gallons de peinture.

Examen 8 - solutions
Partie A

1. Sur $[-1{,}0]$, la fonction est positive, ainsi elle ne peut être négative sur $[-2{,}0]$. D'où, l'énoncé de la réponse B est faux.

La bonne réponse est B.

2. Observons que $\sqrt{x^{16k}} = (x^{16k})^{\frac{1}{2}} = x^{16k(\frac{1}{2})} = x^{8k}$, et que $\sqrt{\dfrac{x^{16k}}{4}} = \dfrac{\sqrt{x^{16k}}}{\sqrt{4}} = \dfrac{x^{8k}}{2}$.

La bonne réponse est C.

3. Deux sphères quelconques sont semblables. Si le rapport des aires est $\frac{1}{25}$, alors celui des côtés est $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$. D'où, le rapport des volumes est $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$.

La bonne réponse est B.

4. Le revenu étant de $7\,072\,\$$, on a l'équation $12x + 7y = 7072$. Dire qu'on a vendu huit fois plus de billets d'enfants que d'adultes, revient à dire que $y = 8x$.

La bonne réponse est B.

5. La droite $y = x$ coupe l'axe des abscisses en $(0{,}0)$. La droite $x = 1$ coupe l'axe des abscisses en $(1{,}0)$. La droite $x + y + 1 = 0$ coupe l'axe des abscisses en $(-1{,}0)$. La droite $y = 1$ est une droite horizontale situé à 1 unité au dessus de l'axe des x. Ainsi, la droite $y = 1$ ne touche jamais l'axe des x.

La bonne réponse est C.

6.

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} \times \frac{x^2}{(x+2)(x-1)} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2)}{x(x+1)(x+2)(x-1)} = \frac{x}{x+2}.$$

La bonne réponse est B.

7. Par la trigonométrie du triangle rectangle, on sait que $\tan(\angle RQS) = \frac{RS}{QS}$, donc A est faux. L'angle QRS peut être considéré comme l'un des angles du triangle rectangle RQS ou comme l'un des angles du triangle rectangle PQR. Dans le premier cas, $\sin(\angle QRS) = \frac{QS}{QR}$ et, dans le second, on a $\sin(\angle QRS) = \frac{PQ}{PR}$. Comme aucun de ces deux angles n'est le même que celui de la réponse B, on en déduit que B est faux. L'angle QPS peut être considéré comme l'un des angles du triangle rectangle PQR ou comme l'un des angles du triangle rectangle PQS. Dans le premier cas, on a $\sin(\angle QPS) = \frac{QR}{PR}$ et, dans le second, $\sin(\angle QPS) = \frac{QS}{PQ}$. On voit également qu'aucun de ces deux angles n'est le même que celui de la réponse C. Donc, C est faux. Enfin, pour l'angle SQP, on a $\cos(\angle SQP) = \frac{QS}{QP}$, qui est le même que dans la réponse D.

La bonne réponse est D.

8. Dans la réponse A, Claire consulte des experts, elle effectue donc une enquête. Dans la réponse D, le directeur de l'établissement demande à tous les élèves de son école; c'est donc un recensement. La réponse C ne correspond à aucune étude statistique car la même personne est intérrogée sans arrêt. Rappelons qu'un sondage est effectué lorsqu'on prélève un échantillon dans une population afin d'étudier certaines caractéristiques spécifiques de celle-ci. Un sondage d'opinion est tout simplement un sondage qui est uniquement intéressé à savoir l'opinion des gens sur une question donnée. Dans la réponse B, le chef veut savoir l'opinion de certaines personnes, mais pas tous. C'est donc un sondage d'opinion.

La bonne réponse est B.

9. En général, deux figures isométriques sont semblables. Donc A est vrai. Deux carrés quelconques sont semblables, le rapport de similitude étant le rapport de leur côtés. Donc B est vrai. Pour la réponse D, deux cercles qui ont la même aire doivent avoir le même rayon. Il sont donc isométriques. D est donc également vrai. Si on prend un rectangle et qu'on double la mesure de ses côtés, on obtient un rectangle semblable au premier, mais ces deux rectangles ne sont pas isométriques. Donc, C est faux.

La bonne réponse est C.

10. La valeur de c dans $f(x) = ax^2 + bx + c$ est l'ordonnée à l'origine de la parabole. Donc, si on fixe les valeurs de a et de b et qu'on décroît celle de c, alors le graphique de $y = ax^2 + bx + c$ sera comme celui de f excepté qu'il aura une ordonnée à l'origine plus petite que celle de f. Cela signifie que la parabole est translatée vers le bas.

La bonne réponse est D.

Examen 8 - solutions
Partie B

11. Comme Robert marche à vitesse constante, le point P partage le segment RS dans le rapport de partie à partie de $20:30$. Le rapport $20:30$ est équivalent au rapport $2:3$, qui est lui même équivalent à la fraction $\frac{2}{5}$. Nous pouvons maintenant appliquer la formule de partage pour déterminer les coordonnées du point $P=(x_d{,}y_d)$, avec point d'origine $(x_1{,}y_1)=(94{,}7)$, de terminaison $(x_2{,}y_2)=(8{,}88)$ et de fraction $F=\frac{2}{5}$. On obtient

$$x_d = x_1 + F(x_2 - x_1) = 94 + \frac{2}{5}(8-94) = 59{,}6$$

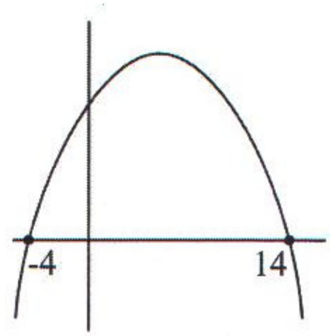
$$y_d = y_1 + F(y_2 - y_1) = 7 + \frac{2}{5}(88-7) = 39{,}4.$$

Les coordonnées du parc sont $(59{,}6\,,39{,}4)$**.**

12. Nous devons déterminer les zéros de f. Pour cela, il nous faut résoudre l'équation $-2(x-5)^2+162=0$. Utilisons la formule quadratique

$$x = h \pm \sqrt{\frac{-k}{a}} = 5 \pm \sqrt{\frac{-162}{-2}} = 5 \pm \sqrt{81} = 5 \pm 9.$$

Les zéros sont alors $x=5-9=-4$ et $x=5+9=14$. Comme $a=-2$ est négatif, on sait que la parabole s'ouvre vers le bas. Grossièrement, le graphique de f ressemble à



Le graphique nous indique clairement où f est positive.

La fonction f est positive sur $[-4{,}14]$**.**

13. Comme $\angle ABP$ et $\angle BCR$ sont des angles correspondants, ils sont égaux. D'où $\angle BCR = 30°$. Comme $\angle EDU$ et $\angle UDC$ sont supplémentaires, on a $\angle UDC = 180° - 140° = 40°$. Comme $\angle RCD$ et $\angle UDC$ sont des angles alternes intérieurs, ils sont égaux. D'où $\angle RCD = 40°$. On en conclut que

$$\angle BCD = \angle BCR + \angle RCD = 30° + 40° = 70°.$$

La mesure de l'angle BCD est $70°$.

14. Pour déterminer la distance entre deux droites parallèles, nous devons tout simplement choisir un point sur l'une d'entre elles et calculer la distance de ce point à la seconde. Peu importe le point choisi, le résultat sera le même. Choisissons un point sur la droite $-3x + 5y + 20 = 0$. En posant $x = 0$, on obtient l'équation $-3(0) + 5y + 20 = 0$, d'où $y = -4$. Ainsi, le point $(0, -4)$ est sur la droite $-3x + 5y + 20 = 0$. On utilise alors la formule de la distance entre un point (x_1, y_1) et une droite $Ax + By + C = 0$, avec le point $(0, -4)$, et la droite $6x - 10y - 3 = 0$. On obtient

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6(0) + (-10)(-4) + (-3)|}{\sqrt{6^2 + (-10)^2}} = \frac{37}{\sqrt{136}} \approx 3{,}2 \text{ unités}$$

La distance entre les deux droites est approximativement $3{,}2$ unités.

15. Soit A l'aire de la base du cône de hauteur $h = 12$ et de volume $V = 324\pi$. Le volume d'un cône est égal à l'aire de sa base fois sa hauteur divisé par 3, ce qui s'exprime par $V = Ah/3$. En y substituant les valeurs ci-dessus, on voit que $324\pi = A(12)/3$, d'où $A = 81\pi$. Ainsi, le cône dont l'aire de la base est 9π est le plus petit des deux. Soit $p > 1$ le rapport de similitude de ces deux solides. Alors,

$$p^2 = \frac{\text{aire de base du grand cône}}{\text{aire de base du petit cône}} = \frac{81\pi}{9\pi} = 9.$$

D'où $p^2 = 9$ et $p = 3$. La hauteur du petit cône est $12 \div p = 12 \div 3 = 4\,cm$. Soit r le rayon du petit cône. Comme l'aire de la base du petit est 9π, on sait que $\pi r^2 = 9\pi$. Ce qui implique que $r = 3$. Le rayon, la hauteur et l'apothème du cône forment un triangle rectangle. Ainsi, si s est l'apothème du petit cône, alors, par le théorème de Pythagore, $r^2 + h^2 = s^2$. Ce qui donne $3^2 + 4^2 = s^2$, et $s = 5\,cm$.

L'apothème du petit cône est $5\,cm$.

16. La justification de l'étape 2: **Angles alternes intérieurs.**

La justification de l'étape 4: **condition ACA pour triangles isométriques.**

Examen 8 - solutions

Partie C

17. Nous devons déterminer l'équation de la droite et de la parabole. D'abord, comme la droite passe par les points $(0{,}22)$ et $(8{,}54)$, elle a une pente égale à $\dfrac{54-22}{8-0} = 4$. Ensuite, comme elle a une ordonnée à l'origine égale à 22, son équation est donnée par $y = 4x + 22$. Ainsi, après 10 ans, l'action de la compagnie RFC a une valeur de $4(10) + 22 = 62\,\$$. Quant à la parabole, elle a son sommet en $(0{,}22)$, d'où une équation de la forme $y = a(x-0)^2 + 22$. Le point $(8{,}54)$ est situé sur cette parabole, d'où par substitution, on a l'équation $54 = a(8-0)^2 + 22$. Ce qui donne $a = 0{,}5$, et l'équation $y = 0{,}5(x-0)^2 + 22$, ou plus simplement, $y = 0{,}5x^2 + 22$. Ainsi, après 10 ans, l'action de la compagnie MNX a une valeur de $0{,}5(10)^2 + 22 = 72\,\$$. Par conséquent, après dix ans, la différence entre la valeur de ces deux actions est de $72\,\$ - 62\,\$ = 10\,\$$.

Après dix ans, la différence entre la valeur de ces deux actions est de $10\,\$$.

18. Rappelons que la médiane et Q_2 désignent la même chose. Dans la classe de Omar, $Q_2 = 77{,}5$. Dans celle de Élise, $Q_1 = 50$. Donc, la note obtenue par ces deux étudiants se situe entre 50 et $77{,}5$. Les seules notes de la liste qui sont dans cet intervalle sont 65, 72 et 77. Dans la classe de Omar, 65 est dans le rang cinquième 3 mais, dans la classe de Élise, 65 est dans le rang cinquième 4. Donc, la note commune de ces étudiants ne peut être 65. Dans la classe de Omar, 77 est dans le rang cinquième 3 mais, dans la classe de Élise, 77 est dans le rang cinquième 2. Ça ne peut donc être 77 non plus. On voit que 72 est dans le rang cinquième 3 dans les deux classes.

La note obtenue par ces deux étudiants est 72.

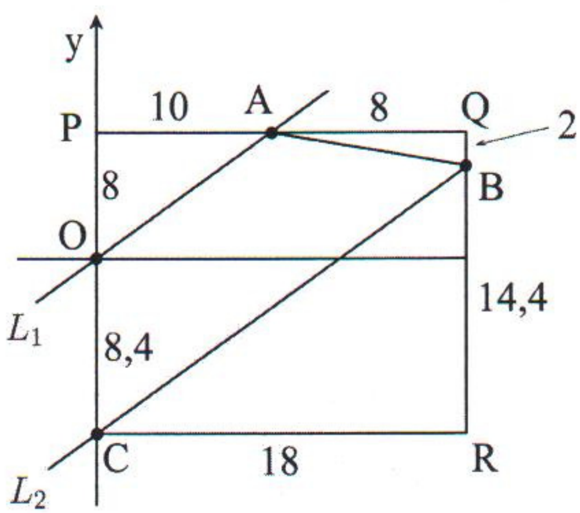
19. En appliquant la trigonométrie du triangle rectangle à ABC, on a $\cos 62 = \dfrac{BC}{26}$. D'où $BC = 26(\cos 62) \approx 12{,}21\,cm$. Observons que ED et BC sont parallèles et que BD est une sécante à ces deux droites parallèles. Comme $\angle EDB$ et $\angle CBD$ sont des angles alternes intérieurs, ils sont égaux, d'où $\angle CBD = 47°$. La somme des angles du triangle BCD est égale à $180°$, d'où $\angle BDC = 180° - 62° - 47° = 71°$. Maintenant, la loi des sinus appliquée à BCD donne

$$\frac{BD}{\sin 62} = \frac{12{,}21}{\sin 71}.$$

D'où $BD = \dfrac{12{,}21(\sin 62)}{\sin 71} \approx 11{,}4\,cm.$

Le segment BD mesure approximativement $11{,}4\,cm$**.**

20. Déterminons d'abord les coordonnées du point C. Comme C correspond à l'ordonnée à l'origine de la droite L_2, nous devons d'abord trouver cette dernière. La pente de la droite L_1 est $\dfrac{8-0}{10-0} = 0{,}8$. Comme les droites L_1 et L_2 sont parallèles, elles ont la même pente, donc la pente de L_2 est aussi égale à $0{,}8$. L'équation de L_2 est donc de la forme $y = 0{,}8x + b$. Comme L_2 passe par $B = (18{,}6)$, en substituant ses coordonnées dans l'équation, on a $6 = 0{,}8(18) + b$, d'où $b = -8{,}4$. L'équation de la droite L_2 est $y = 0{,}8x - 8{,}4$. On voit que l'ordonnée à l'origine de la droite L_2 est $-8{,}4$, d'où $C = (0\,,-8.4)$. Pour calculer l'aire du trapèze, dessinons un rectangle autour de celui-ci. Ensuite, déterminons les mesures de tous les côtés comme l'indique le diagramme ci-dessous:



L'aire du trapèze $ABCO$ peut être calculée en déterminant l'aire du rectangle $PQRC$, dont on soustrait celles des trois triangles rectangles AOP, ABQ et BCR. Substituons dans l'équation

$$\text{Aire}\, ABCO = \text{Aire}\, PQRC - \text{Aire}\, AOP - \text{Aire}\, ABQ - \text{Aire}\, BCR,$$

les valeurs numériques,

$$\text{Aire}\, ABCO = (18)(16{,}4) - \frac{(8)(10)}{2} - \frac{(8)(2)}{2} - \frac{(18)(14{,}4)}{2} = 117{,}6 \text{ unités carrées.}$$

L'aire est de $117{,}6$ **unités carrées.**

Remarque: Si dans cette question, on avait demandé de calculer la hauteur du trapèze $ABCO$, on aurait déterminé l'équation de L_1 qui est $y = 0{,}8x$. La hauteur du trapèze est alors la distance entre le point $B = (18{,}6)$ et la droite $y = 0{,}8x$. Cette dernière est donnée par la formule

$$\frac{|ax_1 - y_1 + b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|0{,}8(18) - 6 + 0|}{\sqrt{0{,}8^2+1}} \frac{8{,}4}{\sqrt{1{,}64}} \approx 6{,}56 \text{ unités.}$$

21. Le polynôme $9x^2 + 30xy + 25y^2$ est un carré parfait puisqu'il peut être factorisé en $(3x+5y)(3x+5y) = (3x+5y)^2$. Cela signifie que chaque côté du carré $ABCD$ mesure $3x + 5y$. Ainsi, la largeur du rectangle hachurée est

$$(3x + 5y) - (x + y) - (x + y) = 3x + 5y - x - y - x - y = x + 3y.$$

La longueur du rectangle hachurée est

$$(3x + 5y) - (x + y) = 3x + 5y - x - y = 2x + 4y.$$

D'où l'aire du rectangle hachurée est $(x + 3y)(2x + 4y) = 2x^2 + 10xy + 12y^2$.

L'aire du rectangle hachurée est $2x^2 + 10xy + 12y^2$.

22. Pour déterminer les coordonnées du point B, nous allons trouver l'équation de la droite BF et calculer B comme étant le point d'intersection des droites BF et BC. D'abord, nous allons calculer les coordonnées du point C qui est le point d'intersection de la droite $y = -5x + 420$ avec l'axe des x. Pour ce faire, posons $y = 0$ pour obtenir l'équation $0 = -5x + 420$; cela donne $x = 84$ et $C = (84{,}0)$. La pente du segment CF est

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{24 - 0}{48 - 84} = -\frac{2}{3}.$$

Comme les segments CF et BF sont perpendiculaires, la pente de BF est l'opposé de l'inverse de la pente CF. Donc la pente de BF est $\frac{3}{2} = 1{,}5$. L'équation de la droite BF est donc de la forme $y = 1{,}5x + b$. Comme la droite BF passe par le point de coordonnées $(48{,}24)$, par substitution, on a l'équation $24 = 1{,}5(48) + b$. D'où $b = -48$, et l'équation de la droite BF est $y = 1{,}5x - 48$. On peut maintenant trouver le point B en résolvant le système d'équations

$$y = 1{,}5x - 48 \quad \text{et} \quad y = -5x + 420.$$

En utilisant la méthode de comparaison on obtient l'équation $1{,}5x - 48 = -5x + 420$. D'où $x = 72$ et $y = 1{,}5(72) - 48 = 60$.

Les coordonnées de B sont $(72{,}60)$.

23. Soit x la mesure du côté ED. Alors x est aussi la mesure du côté CB. La mesure de FD est $16+x$. Par similitude des rectangles $ACDF$ et $CDEB$, on a

$$\frac{AF}{CB}=\frac{FD}{BE}, \quad \text{qui devient} \quad \frac{6}{x}=\frac{16+x}{6}.$$

En faisant le produit en croix, on a $6(6) = x(16+x)$. Par simplification, cela donne $x^2+16x-36=0$. En factorisant, on obtient $(x-2)(x+18)=0$. D'où $x=2$ ou $x=-18$. Mais, comme bien sûr $x>0$, on doit avoir $x=2$. Donc la mesure du côté AC égale la mesure du côté FD qui est égale à $16+x=16+2=18$ unités.

Le côté AC mesure 18 unités.

24. Comme la hauteur maximale atteinte par la pierre est de 40 pieds, on a $k=40$, et donc $g(x)=a(x-60)^2+40$. Comme le point $(200{,}0)$ est sur le graphique de la parabole, on a par substitution, l'équation $0=a(200-60)^2+40$. Cela donne $a=-\frac{1}{490}$, donc les pierres lancées par le catapulte suivent une trajectoire donnée par

$$g(x)=\frac{-1}{490}(x-60)^2+40.$$

Comme $200-98=102$, on voit que la base extérieure de la forteresse est située en le point $(102{,}0)$. La hauteur de la pierre lorsqu'elle passe au-dessus du mur de la forteresse est de

$$g(102)=-\frac{1}{490}(102-60)^2+40=36{,}4\,\text{pieds}.$$

Ainsi la pierre est à $36{,}4-33=3{,}4$ pieds au-dessus du mur de la forteresse.

Les pierres passent à $3{,}4$ pieds au-dessus de la forteresse.

25. La formule de l'aire A d'une sphère de rayon r est $A = 4\pi r^2$. L'aire de l'hémisphère du petit silo est $55\,m^2$. L'aire de la sphère d'où provient cette hémisphère est donc deux fois plus grand, soit $2(55) = 110\,m^2$. D'où $110 = 4\pi r^2$ et $r = \sqrt{\dfrac{110}{4\pi}} \approx 2{,}96$. Le rayon de la partie cylindrique du petit silo est approximativement $2{,}96\,m$, et son volume est

$$\pi r^2 h = \pi(2{,}96)^2(8) \approx 220\,m^3.$$

Le volume de l'hémisphère du petit silo est

$$\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \div 2 \left(\frac{4}{3}\pi(2{,}96)^3\right) \div 2 \approx 54{,}3\,m^3.$$

Donc le volume total du petit silo est $220 + 54{,}3 = 274{,}3\,m^3$. Soit p le rapport de similitude de ces deux solides, avec $p > 1$. On sait que

$$p^3 = \frac{\text{volume du grand silo}}{\text{volume du petit silo}} = \frac{475}{274{,}3}.$$

D'où $p = \sqrt[3]{\dfrac{475}{274{,}3}} \approx 1{,}2$. Maintenant, l'aire latérale de la partie cylindrique du petit silo est

$$2\pi r h = 2\pi(2{,}96)(8) \approx 148{,}8\,m^2.$$

En ajoutant cela à l'aire de $55\,m^2$ de l'hémisphère, on obtient $148{,}8 + 55 = 203{,}8\,m^2$. L'aire totale à peindre sur le petit silo est donc de $203{,}8\,m^2$. On peut maintenant utiliser le rapport de similitude pour déterminer

$$\text{Aire du grand silo} = p^2 \times (\text{Aire du grand silo}) = (1{,}2)^2(203{,}8) \approx 293{,}5\,m^2.$$

Donc l'aire totale à peindre sur les deux silos est approximativement $203{,}8 + 293{,}5 = 497{,}3\,m^2$. Chaque gallon de peinture couvre une surface de $25\,m^2$, d'où le nombre de gallons nécessaires est $497{,}3 \div 25 \approx 20$.

La peinture des deux silos nécessite un total de 20 gallons de peinture.