Examen 9 - solutions

Partie A

1.	A	6.	C
2.	A	7.	C
3.	B	8.	B
4.	B	9.	C
5.	D	10.	A

Partie B

11. La distance entre les points E et F est approximativement 12 unités.
12. Les coordonnées du point N sont $(-8, -3)$.
13. La hauteur du petit prisme est approximativement $14{,}3\,m$.
14. La fonction f est donnée par $f(x) = 0{,}4x - 2$.
15. Le volume est approximativement $4\,731\,cm^3$.
16. La raison pour l'étape 2 est: D est le milieu de BC.
    La raison pour étape 4 est: condition CCC pour triangles isométriques.

Partie C

17. Les notes manquantes sont 51, 70, 73 et 82.
18. Charles a 42 pièces de monnaie.
19. L'angle au sommet du cône est approximativement $41°$.
20. Après 1 seconde, la hauteur de la baleine au dessus de l'eau est $160\,cm$.
21. L'aire du rectangle $ACEG$ est $600\,cm^2$.
22. Le rapport de similitude est 2.
23. L'aire du trapèze $PQSR$ est $2\,016$ unités carrées.
24. La longueur de ST est approximativement $26{,}5\,cm$.
25. Le propriétaire a besoin de $1\,608\,m$ de clôture.

Examen 9 - solutions

Partie A

1. On simplifie chaque expression comme suit.

A) $\sqrt{(4x^2)(4y^2)} = \sqrt{4x^2}\sqrt{4y^2} = (2x)(2y) = 4xy,$

B) $\sqrt{\dfrac{x^9}{4y^2}} = \dfrac{\sqrt{x^9}}{\sqrt{4y^2}} = \dfrac{x^{\frac{9}{2}}}{2y},$

C) $\sqrt{3x}\sqrt{3y} = \sqrt{(3x)(3y)} = \sqrt{9xy} = \sqrt{9}\sqrt{xy} = 3\sqrt{xy},$

D) $\sqrt{\dfrac{8x^2}{y^4}} = \dfrac{\sqrt{8x^2}}{\sqrt{y^4}} = \dfrac{2\sqrt{2}x}{y^2}.$

La bonne réponse est A.

2. Deux sphères quelconques sont semblables, avec un rapport de similitude égale au rapport de leur rayon. Donc l'énoncé (1) est vrai. Dans l'énoncé (2), le volume du premier cylindre est $V = \pi r^2 h = \pi(6)^2(100) = 3600\pi$ et celui du second cylindre est $V = \pi r^2 h = \pi(15)^2(16) = 3600\pi$. Comme ces deux cylindres ont le même volume, on en conclut qu'ils sont bien semblables. Donc (2) est vrai. Un cône et un cylindre ne peuvent pas être semblables, donc (3) est faux.

La bonne réponse est A.

3. L'âge de Christine est $x - 34$, et celui de Jill est $4(x - 34)$. Le produit de l'âge de Angela et de celui de Christine est $x(x - 34)$. Neuf fois l'âge de Jill est $9(4)(x - 34)$. Ces deux expressions doivent être égales, d'où l'équation $x(x - 34) = 9(4)(x - 34)$.

La bonne réponse est B.

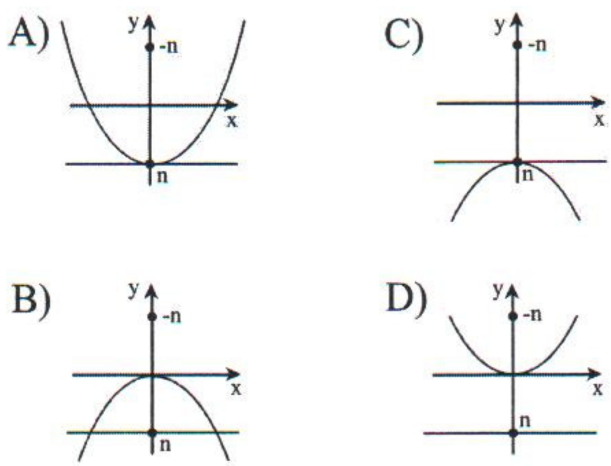
4. Utilisons la loi des cosinus, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos A)$. En y substituant les valeurs numériques, on a

$$90^2 = 45^2 + 60^2 - 2(45)(60)(\cos A)$$
$$\cos A = \frac{90^2 - 45^2 - 60^2}{-2(45)(60)} \approx -0{,}4583.$$

D'où $A = \cos^{-1}(-0{,}4583) \approx 117°$.

La bonne réponse est B.

5. Observons que, comme $n < 0$, le point $(0,n)$ est en dessous de l'axe des x, alors que le point $(0,-n)$ est au dessus. Le graphique de chacun des quatre systèmes est donné dans le diagramme ci-dessous.



On voit que les systèmes dans les réponses A et C ont chacun exactement une solution, et que celui de la réponse B a deux solutions. Dans la réponse D, les graphiques ne se coupent pas, donc le système n'a aucune solution.

La bonne réponse est D.

Note: Si l'approche si dessus vous semble trop abstraite à cause du nombre négatif n, vous pouvez vous convaincre du raisonnement en choisissant n'importe quel nombre négatif. Par exemple, prenez $n = -3$ et dessinez le graphique de tous les systèmes. Ils ressembleront à ceux ci-dessus, et vous obtiendrez les mêmes réponses.

6. La valeur initiale des actions est de $10\,000(14{,}45\,\$) = 144\,500\,\$$. Comme chaque action augmente de $0{,}36\,\$$ chaque 3 mois, chaque action augmente de $0{,}36\,\$ \div 3 = 0{,}12\,\$$ par mois. Donc après n mois, l'augmentation de la valeur des $10\,000$ actions est $10\,000(0{,}12)(n) = 1200n$. Ainsi, la valeur totale après n mois est de $V(n) = 1\,200n + 144\,500$.

La bonne réponse est C.

7. La première chose à observer est que, puisque les enfants ne votent pars lors d'une élections, ils ne doivent pas être pris en compte dans l'échantillon. Donc, la réponse D est fausse. Comme l'échantillon doit être représentatif, on sait que la réponse A est fausse car le nombre d'adultes vivant sur chaque rue n'est pas le même. Nous allons déterminer combien d'adultes sur Juliette et Charon doivent être choisis. Le nombre total d'adultes est de $134 + 205 + 86 + 375 = 800$. Le nombre d'adultes x sur la rue Juliette que l'on doit inclure dans l'échantillon est donné par le rapport

$$\frac{x}{160} = \frac{205}{800}.$$

D'où $x = (160)(205)/800 = 41$. Donc B est aussi faux. Maintenant, déterminons le nombre d'adulte y de la rue Charon que doit inclure l'échantillon. Il est donné par le rapport

$$\frac{y}{160} = \frac{375}{800}.$$

D'où $y = (160)(375)/800 = 75$.

La bonne réponse est C.

8. Dans la réponse A, l'image de la fonction est $[0,\infty[$, donc A est faux. L'image de la fonction dans la réponse C est $]-\infty,1]$, donc C est aussi faux. Dans la réponse D, la fonction est négative sur $[1,\frac{3}{2}]$, donc D est aussi faux.

La bonne réponse est B.

9.

$$\frac{9-3x}{x^2-9} + \frac{x}{x+3} = \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{x}{x+3} = \frac{-3}{x+3} + \frac{x}{x+3} = \frac{-3+x}{x+3} = \frac{x-3}{x+3}.$$

La bonne réponse est C.

10. D'abord, observons que la réponse D ne peut être correcte puisque deux triangles ne peuvent être isométriques que s'ils ont au moins les mêmes dimensions (les triangles de la réponse D sont semblables par la conditions CCC pour triangles semblables mais ne sont pas isométriques). Dans la réponse B, nous ne connaissons pas les mesures des triangles, et il n'y aucune raison pour que ces deux triangles soient isométriques (les triangles de la réponse B sont semblables par AA). Dans la réponse C, l'angle manquant dans les deux triangles est égal à $180° - 120° - 20° = 40°$, et on voit qu'aucune des conditions CAC, CCC ou ACA ne peut s'appliquer. Donc C est aussi faux. Quant à la réponse A, l'angle manquant dans le triangle de gauche est $180° - 110° - 30° = 40°$. On voit alors que ACA s'applique.

La bonne réponse est A.

Examen 9 - solutions
Partie B

11. En résolvant, en termes de y, l'équation $4x - y - 7 = 0$, on a $y = 4x - 7$. Comme F est le point d'intersection de la droite avec l'axe des y, on a $F = (0, -7)$. Pour déterminer les coordonnées du point E, nous devons résoudre le système d'équations $y = 4x - 7$ et $y = -x^2 + 10x - 16$. Pour cela, nous utilisons la méthode de comparaison pour obtenir l'équation $4x - 7 = -x^2 + 10x - 16$. En ramenant tous les termes du même côté, on obtient l'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$. Cela se factorise en $(x - 3)(x - 3) = 0$, d'où $x = 3$ et $y = 4(3) - 7 = 5$. Donc, on a $E = (3{,}5)$. Maintenant, calculons la distance entre les points $E = (3{,}5)$ et $F = (0, -7)$ en utilisant la formule de la distance

$$d(E{,}F) = \sqrt{(3-0)^2 + (5 - -7)^2} = \sqrt{9 + 144} = \sqrt{153} \approx 12 \text{ units.}$$

La distance entre les points E et F est approximativement 12 unités.

12. La condition $\dfrac{PN}{PQ} = \dfrac{5}{6}$ signifie que le point N est situé aux $\frac{5}{6}$ du chemin entre P et Q. Ici, $F = \frac{5}{6}$ est une fraction, non un rapport de partie à partie. Pour trouver les coordonnées de N, nous allons utiliser la formule du point de partage avec $(x_1{,}y_1) = (-3{,}7)$ et $(x_2{,}y_2) = (-9, -5)$,

$$x_d = x_1 + F(x_2 - x_1) = -3 + \frac{5}{6}(-9 - -3) = -8$$

$$y_d = y_1 + F(y_2 - y_1) = 7 + \frac{5}{6}(-5 - 7) = -3.$$

Les coordonnées du point N sont $(-8, -3)$.

13. Nous savons que le volume d'un prisme rectangle est égal à l'aire de sa base fois sa hauteur. Soit A l'aire de la base du grand prisme. Alors, on a l'équation $20A = 2940$, et $A = 147$. Si p est le rapport de similitude des deux solides, avec $p > 1$, alors on a

$$p^2 = \frac{\text{aire de base du grand prisme}}{\text{aire de base du petit prisme}} = \frac{147}{75} = 1{,}96.$$

D'où, $p = \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$. La hauteur du petit prisme est égale à la hauteur du grand prisme divisé par p, soit $20 \div p = 20 \div 1{,}4 = \frac{100}{7} \approx 14{,}3\,m$.

La hauteur du petit prisme est approximativement $14{,}3\,m$.

14. Comme le graphique est une droite, la fonction f doit être de la forme $f(x) = ax + b$. Comme l'ordonnée à l'origine est -2, on sait que $b = -2$. Sachant que les points $(5{,}0)$ et $(0,-2)$ sont sur la droite, on obient que la pente de la droite est égale à $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-2-0}{0-5} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$. D'où $f(x) = 0{,}4x - 2$.

La fonction f est donnée par $f(x) = 0{,}4x - 2$.

15. D'abord, nous allons trouver le volume du solide qui est dans le diagramme. Le rayon du cylindre est $42 \div 2 = 21\,cm$ et sa hauteur $30\,cm$. Donc, le volume du cylindre est de

$$\pi r^2 h = \pi(21)^2(30) = 13230\pi\,cm^3.$$

Le diamètre du cône est $42 - 8 - 8 = 26\,cm$; donc, son rayon est de $26 \div 2 = 13\,cm$. La hauteur du cône est $21\,cm$. Donc, le volume du cône est de

$$\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi(13)^2(21)}{3} = 1183\pi\,cm^3.$$

Par conséquent, le volume du solide dans le diagramme est $13230\pi - 1183\pi = 12047\pi\,cm^3$. Maintenant, nous avons un solide semblable dont la hauteur est la moitié de celle du solide que nous avons dans notre diagramme. Cela signifie que le rapport de similitude de ces deux solides est $p = 2$. Donc le volume du petit solide est $12047\pi \div p^3 = 12047\pi \div 2^3 \approx 4\,731\,cm^3$.

Le volume est approximativement $4\,731\,cm^3$.

16. La raison de l'étape 2 est: D **est le milieu de** BC.

La raison de l'étape 4 est: **condition CCC pour triangles isométriques.**

Examen 9 - solutions
Partie C

17. Sur une feuille de papier, dessinons 29 points représentant chacun l'un des 29 nombres. Le premier point correspond à 51 et le dernier à 94. Ainsi 51 est l'une des notes manquantes. Pour un total de 29 nombres, on voit que Q_1 est la moyenne du 7ème et du 8ème nombre, Q_2 est le 15ème nombre, et Q_3 est la moyenne du 22ème et du 23ème nombre. Donc, le 15ème point doit être $Q_2 = 73$, qui est de ce fait l'une des notes manquantes. Maintenant, les points entre le 2ème et le 7ème doivent correspondre respectivement aux nombres 52, 52, 59, 62, 63, 68. Donc, $Q_1 = 69$ doit être la moyenne de 68 et du 8ème nombre. Cela implique que le 8ème point correspond à 70, qui est donc une autre note manquante. On voit alors que, entre le 9ème point et le 14ème point, on doit avoir les nombres 71, 71, 72, 72, 72, 72. Comme $Q_3 = 82$ est la moyenne du 22ème et du 23ème nombres, et que le nombre 82 est sur la liste, on voit que 82 doit être l'une des notes manquantes. Ainsi, entre le 16ème et le 21ème point, on a les nombres 74, 74, 76, 76, 77, 78. Le 22ème et le 23ème points sont des 82, et entre le 24ème point et le 29ème, nous avons les nombres 85, 87, 89, 89, 91, 94.

Les notes manquantes sont 51, 70, 73 et 82.

18. Soient x le nombre de pièces de 5 centimes, et y le nombre de pièces de 10 centimes. On nous dit que $0{,}05x + 0{,}10y = 3{,}00$. La moitié du nombre de pièces de 5 centimes est $\frac{x}{2}$, et le tiers du nombre de pièces de 10 centimes est $\frac{y}{3}$. Donc, nous savons que $0{,}05(\frac{x}{2}) + 0{,}10(\frac{y}{3}) = 1{,}20$. Pour se débarasser des dénominateurs, multiplions les deux membres de cette équation par 6 pour obtenir $0{,}15x + 0{,}2y = 7{,}2$. Nous devons résoudre le système

$$0{,}05x + 0{,}10y = 3{,}00$$

$$0{,}15x + 0{,}2y = 7{,}2.$$

Multiplions la première équation par 3 pour avoir le système équivalent

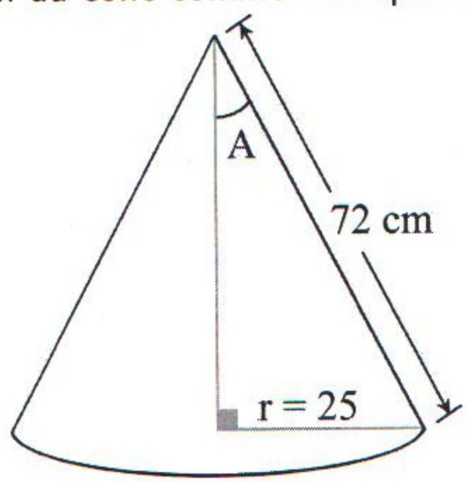
$$0{,}15x + 0{,}3y = 9$$

$$0{,}15x + 0{,}2y = 7{,}2.$$

Par la méthode par élimination, soustrayons les deux équations. Cela donne $0{,}1y = 1{,}8$, d'où $y = 1{,}8/0{,}1 = 18$. Substituons $y = 18$ dans l'équation $0{,}05x + 0{,}10y = 3{,}00$ pour avoir $0{,}05x + 0{,}10(18) = 3{,}00$, et $x = 24$. Le nombre total de pièces de monnaie est $x + y = 24 + 18 = 42$.

Charles a 42 pièces de monnaie.

19. La formule pour la circonférence d'un cercle est $C = 2\pi r$, d'où $r = \dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{157}{2\pi} \approx 25$. Dessinons la hauteur et le rayon du cône comme l'indique le diagramme ci-dessous.



L'angle noté A dans le diagramme peut être calculé en utilisant la trigonométrie du triangle rectangle. On a

$$\sin A = \frac{25}{72},$$

et $A = \sin^{-1}(\frac{25}{72}) \approx 20{,}3°$. L'angle au sommet du cône est le double de l'angle A, ce qui est égal à $2(20{,}3°) = 40{,}6° \approx 41°$.

L'angle au sommet du cône est approximativement $41°$.

20. En utilisant les notations usuelles, soit (h,k) le sommet de la parabole. On a clairement $k = 169$. Comme h est le milieu des deux zéros de la parabole, on a $h = \dfrac{0 + 2{,}6}{2} = 1{,}3$. Donc, le sommet de la parabole est en $(1{,}3\,, 169)$, et l'équation de celle-ci a la forme $y = a(x - 1{,}3)^2 + 169$. Pour déterminer la valeur de a, on substitue le point $(0{,}0)$ dans l'équation. Cela donne $0 = a(0 - 1{,}3)^2 + 169$, et $a = -100$. D'où, l'équation de la parabole est $y = -100(x - 1{,}3)^2 + 169$. Maintenant, pour déterminer la hauteur de la baleine après 1 seconde, nous devons tout simplement poser $x = 1$. On obtient alors

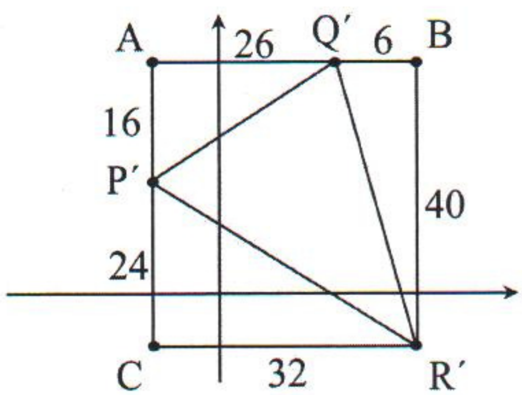
$$y = -100(1 - 1{,}3)^2 + 169 = 160\,cm.$$

Après 1 seconde, la hauteur de la baleine au dessus de l'eau est $160\,cm$.

21. Nous devons d'abord trouver les mesures de SF et de SD afin de pouvoir obtenir une expression pour l'aire du rectangle $SDEF$. Comme $ABSH$ est un carré et que HS mesure $4-2x$, on sait que AH mesure également $4-2x$. La mesure de SF est égale à la mesure de HG, elle-même égale à $AG - AH = (16-x)-(4-2x) = 12+x$. Ainsi SF mesure $12+x$. Comme AC mesure $10-5x$, on sait que HD mesure également $10-5x$. Donc SD mesure $HD - HS = (10-5x)-(4-2x) = 6-3x$. L'aire du rectangle $SDEF$ est $(SF)(SD) = (12+x)(6-3x) = 72-30x-3x^2$. L'aire du carré $ABSH$ est $(4-2x)^2 = 16-16x+4x^2$. Comme le carré $ABSH$ et le rectangle $SDEF$ sont équivalents, on obtient l'équation $16-16x+4x^2 = 72-30x-3x^2$. En ramenant tous les termes du même côté, on a $7x^2+14x-56=0$. En divisant ensuite les deux membres de l'équations par 7, on a $x^2+2x-8=0$ qui se factorise en $(x+4)(x-2)=0$. Cela implique que $x=-4$ ou $x=2$. Notons que x ne peut être égal à 2, sinon on obtiendrait que AC mesure $10-5(2)=0$. Ce qui est impossible. Par conséquent $x=-4$. Le côté AG mesure $16-x = 16-(-4) = 20\,cm$, et le côte AC mesure $10-5x = 10-5(-4) = 30\,cm$. D'où l'aire du rectangle $ACEG$ est $(AG)(AC) = (20)(30) = 600\,cm^2$.

L'aire du rectangle $ACEG$ est $600\,cm^2$.

22. Premièrement, nous devons calculer l'aire de $\Delta P'Q'R'$. On peut faire cela de plusieurs façons, mais nous allons le faire en dessinant un rectangle autour du triangle que nous avons. En utilisant les coordonnées qui nous sont données, on peut déterminer les mesures de tous les côtés horizontaux et verticaux comme indiqué dans le diagramme.



On voit que

$$\text{Aire de } \Delta AQ'P' = \frac{(16)(26)}{2} = 208,$$

$$\text{Aire de } \Delta BQ'R' = \frac{(6)(40)}{2} = 120,$$

$$\text{Aire de } \Delta CP'R' = \frac{(24)(32)}{2} = 384,$$

$$\text{Aire du rectangle } ABR'C = (32)(40) = 1280.$$

D'où

$$\text{Aire de } \Delta P'Q'R' = 1280 - 208 - 120 - 384 = 568\, cm^2.$$

Si p est le rapport de similitude, alors on a

$$p^2 = \frac{\text{Aire de } \Delta P'Q'R'}{\text{Aire de } \Delta PQR} = \frac{568}{142} = 4.$$

D'où $p = \sqrt{4} = 2$.

Le rapport de similitude est 2.

23. Comme l'équation de la droite PQ est $y = 42$, on voit que $P = (0{,}42)$ et que l'ordonnée du point Q est 42. Comme le point Q est sur la droite $y = \frac{3}{4}x + 18$, nous pouvons poser $y = 42$ afin de déterminer son abscisse. Cela nous donne l'équation $42 = \frac{3}{4}x + 18$, d'où $x = 32$ et $Q = (32{,}42)$. Comme le point T correspond à l'ordonnée à l'origine de la droite $y = \frac{3}{4}x + 18$, on a $T = (0{,}18)$. Le rapport de partie à partie $2 : 3$ est le même que la fraction $\frac{2}{5}$. Donc, le point Q est au $\frac{2}{5}$ du chemin entre T et S. Pour obtenir les coordonnées de $S = (x_2{,}y_2)$, utilisons la formule du point de partage avec $F = \frac{2}{5}$, $(x_1{,}y_1) = (0{,}18)$ et $(x_d{,}y_d) = (32{,}42)$. Cela donne

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{F}(x_d - x_1) = 0 + \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)}(32 - 0) = 80$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{F}(y_d - y_1) = 18 + \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)}(42 - 18) = 78.$$

Ainsi $S = (80{,}78)$ et $R = (0{,}78)$. Nous pouvons maintenant calculer l'aire du trapèze $PQSR$. La hauteur RP de celui-ci mesure $78 - 42 = 36$. La petite base PQ et la grande base RS mesurent respectivement 32 et 80. Donc l'aire du trapèze est

$$\text{Aire} = \frac{(\text{petite base} + \text{grande base})(\text{hauteur})}{2} = \frac{(32 + 80)(36)}{2} = 2\,016.$$

L'aire du trapèze $PQSR$ est $2\,016$ unités carrées.

24. Appliquons la loi des cosinus au triangle RSV pour obtenir SV. On a l'équation

$$(SV)^2 = 24^2 + 28^2 - 2(24)(28)\cos(42),$$

d'où $SV \approx 19\,cm$. Comme SV est parallèle à TU, on sait que les angles correspondants sont égaux. Ce qui implique que $\angle RSV = \angle RTU$ et $\angle RVS = \angle RUT$. Par la condition AA pour triangles semblables, cela montre que ΔRSV est semblable à ΔRTU. Nous avons donc le rapport

$$\frac{SV}{TU} = \frac{RS}{RT}, \quad \text{qui devient} \quad \frac{19}{40} = \frac{24}{RT}.$$

D'où $RT \approx 50{,}5\,cm$; et $ST = RT - RS = 50{,}5 - 24 = 26{,}5\,cm$.

La longueur de ST est approximativement $26{,}5\,cm$.

25. Nous avons besoin de calculer le périmètre du triangle BCG. Pour cela nous devons déterminer la mesure des côtés BG, CG et BC. Comme le côté AF mesure $555\,m$, on sait que le côté BG mesure aussi $555\,m$. Comme les deux rectangles $ABGF$ et $CDEG$ sont semblables, on a le rapport

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AF}{CG}, \quad \text{qui devient} \quad \frac{1200}{800} = \frac{555}{CG}.$$

Donc, CG mesure $370\,m$. La somme des angles dans le triangle GEF égale $180°$, d'où $\angle EGF = 180° - 36° - 57° = 87°$. La somme des quatre angles de sommet G égale $360°$, d'où

$$\angle BGC = 360° - \angle BGF - \angle CGE - \angle EGF = 360° - 90° - 90° - 87° = 93°.$$

Maintenant, on peut appliquer la loi des cosinus au triangle BGC pour obtenir le côté BC

$$(BC)^2 = (BG)^2 + (CG)^2 - 2(BG)(CG)\cos(\angle BGC),$$

$$(BC)^2 = 555^2 + 370^2 - 2(555)(370)\cos(93).$$

Cela implique que $BC \approx 683\,m$. Ainsi le périmètre du triangle BCG est

$$BG + CG + BC = 555 + 370 + 683 = 1\,608\,m.$$

Le propriétaire a besoin de $1\,608\,m$ de clôture.